GYMNASIUM LIESTAL

Maturitätsprüfung 2002
Mathematik schriftlich
Klassen 4AB und 4Db

Bemerkungen :	Die Lösung jeder Aufgabe wird mit 7 Punkten bewertet. Für die Note 6 müssen mindestens 39 Punkte erzielt werden.
Hilfsmittel :	Ein Taschenrechner (nicht graphikfähig) . Formelsammlung.

Aufgabe 1

Die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = (e^x - 2)^2$ ist gegeben.

a) In welchen Punkten schneidet die Kurve von f die Gerade g mit der Gleichung $y = 2$?

b) Welche Parallelen zur x-Achse werden von der Kurve von f in nur einem Punkt geschnitten ?

c) Hat die Kurve von f im zweiten Quadranten einen Extremalpunkt ?

d) Liegt der Wendepunkt der Kurve von f auf der y-Achse ?

e) Wieviele Extremalpunkte hat die Kurve mit der Gleichung $y = (e^x - 2)^3$?

Aufgabe 2

Gegeben sind der Punkt S(0 ; 0 ; 18), die Gerade g durch die Punkte A(9 ; 0.5 ; 0) und B(0 ; 10 ; 3.6) sowie die Kugel mit dem Mittelpunkt M(0 ; 0 ; 5), welche die x-y-Ebene berührt.
S sei der Ort einer punktförmigen Lichtquelle.

a) Finden sie eine Gleichung für den Schatten von g auf der x-y-Ebene.

b) Beweisen sie, dass der Schatten von g den Schatten der Kugel auf der x-y-Ebene *berührt.*

c) Folgt aus der in b) bewiesenen Tatsache, dass g die Kugel berührt? Beschreiben sie die geometrische Situation in Worten und überprüfen sie dann mit einer Rechnung, ob g die Kugel berührt!

Aufgabe 3

Der Graph G einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Punkt (0 ; 0) und hat den Extremalpunkt E(2 ; 2). K bezeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt M(2 ; 0) und dem Radius R = 2 .

a) Bestimmen sie die Gleichung von G .

b) G und K begrenzen ein ganz im ersten Quadranten liegendes Flächenstück.
Berechnen sie seinen Inhalt.

c) G und K schneiden sich im vierten Quadranten unter einem Winkel α . Beschreiben sie ausführlich, wie man α berechnen könnte.
Von welchem Grad ist die Gleichung, die man dabei lösen müsste? Warum hat sie eine Doppellösung ?

Aufgabe 4

In der vorliegenden Figur (siehe Beilageblatt) ist die Seite a des äusseren Quadrates fest gegeben, während die Seite x des inneren Quadrates als variabel zu betrachten ist ($0 < x < a$) . Dabei bleiben die Spitzen der vier gleichschenkligen Dreiecke auf den Seitenmitten des äusseren Quadrates.

a) Für welchen Wert von x sind die vier gleichschenkligen Dreiecke sogar gleichseitig? Das Resultat ist symbolisch-exakt mit wurzelfreiem Nenner anzugeben.

b) Das innere Quadrat und die vier gleichschenkligen Dreiecke können die Grund- bzw. Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide bilden. Für welche Werte von x ist das möglich ?
Man kann x so wählen, dass diese Pyramide extremales Volumen hat. Begründen sie das und die Art des Extremums und berechnen sie anschliessend dieses extremale Pyramidenvolumen.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein Dreieck ABC : A(11 ; 10 ; 0) , B(10 ; 2 ; 5) , C(1 ; 8 ; 14) .

a) Berechnen sie den Höhenschnittpunkt H‘ des Grundrisses A‘B‘C‘ des Dreiecks ABC .

b) Der Punkt H‘ von Aufgabenteil a) ist der Grundriss eines Punktes H der Dreiecksfläche ABC.
Berechnen sie die z-Koordinate von H und prüfen sie anschliessend, ob H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.
Sollten sie in Aufgabenteil a) für H‘ kein Resultat gefunden haben, dürfen sie H‘ durch D‘(8 ; 6 ; 0) ersetzen.

Aufgabe 6

a) In der vorliegenden Figur (siehe Beilageblatt) ist die Kurve mit der Gleichung $y = e^{-x}$ gezeichnet.
Berechnen sie den Inhalt der markierten Sägezahnfläche, welche aus unendlich vielen rechtwinkligen Dreiecken mit der gleichen Kathete h besteht, in Abhängigkeit von h.
Geben sie die Flächeninhalte für h = 1 , h = 0.1 und h = 0.01 an.

b) In der vorliegenden Figur (siehe Beilageblatt) ist die Kurve mit der Gleichung $y = {}^{1}/_{x}$ gezeichnet.
Was lässt sich über den Inhalt der markierten Sägezahnfläche, welche aus unendlich vielen rechtwinkligen Dreiecken mit der gleichen Kathete h besteht, in dieser Situation sagen ?

c) Es liegt nahe, die Resultate von a) und b) mit uneigentlichen Integralen in Verbindung zu bringen.
Tun sie das! Rechnen und kommentieren sie !