

Bemerkungen: Die Prüfung dauert 4 Stunden.
 Erlaubte Hilfsmittel sind Taschenrechner ohne Grafik und Programmierung und die Formelsammlung.
 Bitte beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
 Bitte alle Notizen und Lösungsversuche ebenfalls abgeben !

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5
$4 + 2.5 + 4.5$ = 11	$3 + 8 + 2$ = 13	$4 + 4.5 + 3.5$ = 12	$7 + 1 + 1.5 + 2.5$ = 12	$2 + 2 + 1 + 3 + 1.5 + 2.5$ = 12

Aufgabe 1

Gegeben sind die drei Punkte $A(10/1/3)$, $B(4/-2/3)$ und $C(10/-4/-12)$.

- Welchen Abstand hat der Punkt C von der Geraden g, welche durch die Punkte A und B verläuft?
(Geben Sie den Abstand exakt an.)
- Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E_{ABC} , welche durch die Punkte A, B und C verläuft?

Gegeben ist weiter die Gerade $s: \vec{r} = (0,1,3) + t \cdot (-2,1,1)$

- Gesucht ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC, der Spitze S auf der Geraden s und der Höhe $h = 10$ Längeneinheiten.
 - Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten von S. (Geben Sie alle Lösungen an.)

Aufgabe 2

Hinweis: Die Teilaufgaben a), b) und c) lassen sich unabhängig voneinander lösen!

- Gegeben sind die Punkte $P(9/10/5)$ und $R(11/12/1)$ sowie die Gerade $g: \vec{r} = (3,0,7) + t \cdot (3,2,-4)$.

Bestimmen Sie den Punkt M auf der Geraden g, der von P und R den gleichen Abstand besitzt.

- Ein von $Q(19/20/-3)$ kommender Lichtstrahl s wird im Punkt $R(11/12/1)$ an der Kugel K reflektiert:
 $K: (x - 9)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 72$. Erstellen Sie eine Skizze!
 - Geben Sie eine Parametergleichung des reflektierten Strahles s' an.
 - Berechnen Sie den Einfallswinkel des Lichtstrahls s.
 - In welchem Punkt S würde der einfallende Strahl die Kugel K verlassen, wenn diese lichtdurchlässig wäre?
- In welcher gegenseitigen Lage befinden sich die Kugeln $K_1: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 225$ und $K_2: (x - 10)^2 + (y - 7)^2 + (z - 8)^2 = 9$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3

- a) Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, deren Graph den Tiefpunkt $T(0/0)$ besitzt, die x-Achse bei $x = 12$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 108 Flächeneinheiten einschliesst. Erstellen Sie eine grobe Skizze!

Hinweis: Falls Sie die Funktionsgleichung nicht bestimmen können, dann verwenden Sie für die Fortsetzung der Aufgabe die Funktion $y = -\sqrt[3]{(1,16) \cdot x^3} + \sqrt{(3,4) \cdot x^2}$.

- b) b₁) Berechnen Sie den Hoch- und den Wendepunkt dieser Funktion.
 b₂) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
 b₃) Zeichnen Sie die Wendetangente und den Graphen der Funktion unter Einbezug des Gegebenen und des Berechneten in ein Koordinatensystem!
- c) Verbinden Sie den Tief- und den Wendepunkt durch eine Strecke. Diese Strecke und der Graph der Funktion schliessen ein Flächenstück ein. Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt[4]{2x^4 - 36x^2 + 162}$.

- a) Untersuchen Sie diese Funktion vollständig! (Definitionsbereich, Symmetrie, Polstellen und Asymptoten, Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte.) Geben Sie an, ob in den Wendepunkten ein Übergang von Links- in Rechtskurve stattfindet, oder umgekehrt.
- b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte zwischen dem Graphen der Funktion und der Geraden $y = 2$. (Geben Sie die Schnittpunkte exakt an.)
- c) Zeichnen Sie den Graphen für $-8 \leq x \leq 8$. Eine Einheit = 2 Häuschen!
- d) Die Gerade $x = 3$, die Gerade $y = 2$ und der Graph der Funktion $f(x)$ begrenzen im 1. Quadranten ein ins Unendliche reichendes Flächenstück. Untersuchen Sie, ob sein Flächeninhalt endlich ist. Wenn ja, dann geben Sie diesen an! Wenn nein, dann begründen Sie dies.

Aufgabe 5

Teil 1

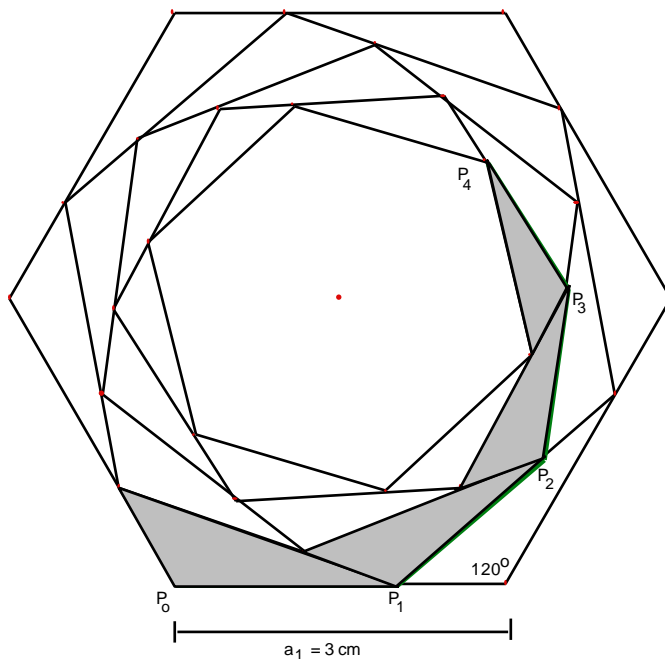
Eine Biologin beobachtet das Wachstum einer Bakterienkultur. Zum Zeitpunkt $t=0$ stellt sie 1600 Bakterien fest. 9 Stunden später sind es bereits doppelt so viele. Sie weiss, dass sich die Bakterien exponentiell vermehren.

- a) a₁) Geben Sie das Wachstumsgesetz der Bakterien in der Form $B(t) = B_0 \cdot a^t$ an!
(Berechnen Sie a auf 2 Nachkommastellen genau!)
 a₂) Um wieviele Prozent wächst die Bakterienzahl pro Stunde?
- b) Nach wievielen Tagen, Stunden und Minuten überschreitet die Bakterienzahl die Millionengrenze?
- c) Geben Sie das Wachstumsgesetz der Bakterien auch in der Form $B(t) = B_0 e^{kt}$ an, also mit der Eulerschen Zahl als Basis. *(Berechnen Sie k auf 3 Nachkommastellen genau.)*

Teil 2

Gegeben ist eine unendliche Folge von einander einbeschriebenen, gedrehten, regulären Sechsecken, deren Seiten a_1, a_2, a_3, \dots eine geometrische Folge bilden. (vgl. Figur!) Die Punkte P_i teilen die zugehörige Sechsecksseite im Verhältnis 2:1. Die erste (äusserste) Sechsecksseite hat die Länge $a_1 = 3$ cm.

- a) Bestimmen Sie das allgemeine Glied a_n der Folge der Sechsecksseiten!
(Geben Sie q exakt an.)
- b) Bestimmen Sie die Gesamtlänge des fetten Streckenspiralzuges, den die Punkte P_i bilden, wenn die Figur unendlich weiter gezeichnet würde. *(Die Länge der Spirale darf gerundet werden, d.h. der Nenner muss nicht wurzelfrei gemacht werden.)*
- c) Berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt der grauen Dreiecke, wenn die Figur unendlich weiter gezeichnet würde. *(Geben Sie den Flächeninhalt exakt an.)*



- a) Bestimmen Sie die Anzahl der Seiten auf dem Umfang der Figur Nr. n : a_n !
Bestimmen Sie die Anzahl der Dreiecke, aus denen die Figur Nr. n erzeugt wurde: A_n !
- b) Bestimmen Sie den Umfang der Figur Nr. n : U_n !
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Figur Nr. n : F_n !
- c) Untersuchen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$!