

- Bemerkungen:
- Es werden alle Aufgaben gleich bewertet.
  - Die Darstellung der Lösungen wird mitbewertet.
  - Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Reihenfolge ist freigestellt.
  - Die Prüfungszeit beträgt 4 Stunden.
  - Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung.

### Aufgabe 1

Gegeben sind die Ebene  $E_1 : 2x + 2y - z - 35 = 0$ , die Kugel  $K_1 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 225$  und die Kugelschar  $K_a^* : x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$  (Parameter  $a > 0$ ).

- Die Kugel  $K_1$  wird an der Ebene  $E_1$  gespiegelt. Ihr Spiegelbild ist die Kugel  $K_2$ , deren Gleichung gesucht ist.
- Zeigen Sie, dass die Kugel  $K_1$  die Ebene  $E_1$  schneidet. Berechnen Sie den Mittelpunkt  $M_k$  und den Radius  $r_k$  des Schnittkreises  $k$  von  $K_1$  und  $E_1$ .
- Bestimmen Sie in der Kugelschar  $K_a^*$  den Kugelmittelpunkt  $M^*$  und den Kugelradius  $r^*$  in Abhängigkeit von  $a$  und weisen Sie nach, dass alle Kugeln der Schar dieselbe Koordinatenebene im gleichen Punkt berühren. Um welche Koordinatenebene handelt es sich? Geben Sie den Berührungspunkt  $B$  an.
- Es gibt in der Kugelschar  $K_a^*$  genau eine Kugel  $K$ , für die gilt: Spiegelt man die Kugel  $K$  an einer geeigneten Ebene  $E_2$ , so ist die Kugel  $K_1$  ihr Spiegelbild. Wie lautet die Gleichung der Kugel  $K$ ? Finden Sie die Koordinatengleichung der Ebene  $E_2$ .

### Aufgabe 2

$M(0/0/0)$ ,  $S(-10/-10/5)$ ,  $g: r = (-10, -10, 5) + t(2, 1, 0)$

- Die Kugel  $K$  besitzt den Mittelpunkt  $M$  und verläuft durch den Punkt  $S$ . Stellen Sie die Kugelgleichung auf.
- Die Gerade  $g$  schneidet die Kugel im Punkt  $S$  und einem weiteren Punkt  $A$ . Berechnen Sie die Koordinaten von  $A$ .

$S$  ist die Spitze und  $A$  eine Ecke der Grundfläche der senkrechten quadratischen Pyramide, welche  $K$  als Umkugel besitzt.

- Gesucht ist die Koordinatengleichung der Ebene  $E$ , in welcher das Grundflächenquadrat liegt.
- Bestimmen Sie den Mittelpunkt  $N$  der Grundfläche.
- Die Ecken  $A, B, C, D$  des Grundflächenquadrates folgen sich, von der Pyramidenspitze  $S$  aus gesehen, in dieser Reihenfolge im Gegenuhrzeigersinn. Berechnen Sie die Ecken  $B, C$  und  $D$ .

### Aufgabe 3

Lösen Sie die folgenden, voneinander unabhängigen Kurzaufgaben a), b) und c):

- Die  $x$ -Koordinate des rechts von der  $y$ -Achse liegenden Schnittpunktes der Parabel  $p : y = x^2$  und der Geraden  $g : y = mx$  ( $m > 0$ ) ist kleiner als 2.  $F_1$  ist die Fläche, welche von  $p$  und  $g$  eingeschlossen wird.  $p$ ,  $g$  und die Gerade  $h : x = 2$  schliessen zusammen ein Flächenstück  $F_2$  ein, welches denselben Inhalt besitzt wie  $F_1$ . Berechnen Sie die Steigung der Geraden  $g$  und den erwähnten Flächeninhalt exakt.  $\rightarrow$

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

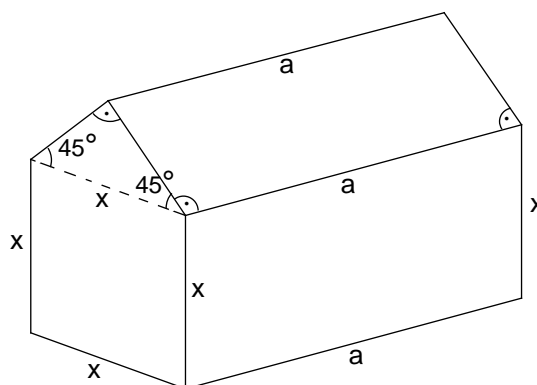
- b) Im Punkt  $B(t > 0/?)$  der Kurve  $k : y = \sqrt{1-x^2}$  wird die Tangente errichtet. begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten ein Dreieck. Lässt man dieses Dreieck um die  $y$ -Achse rotieren, so entsteht ein Kegel. Zeigen Sie, dass das Volumen  $V$  dieses Kegels unabhängig ist von der Lage des Punktes  $B$ . Berechnen das Kegelvolumen exakt.
- c) Von einer Funktion  $f$  kennt man die erste Ableitung  $f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} + \sqrt{3x^2, x^3 + 1}$ . Ferner weiss man, dass der Graph der Funktion  $f$  durch den Punkt  $P(0/2)$  verläuft. Wie lautet die Gleichung der Funktion  $f$ ?

Aufgabe 4

Gegeben ist die Kurve  $k : y = \sqrt{x^2 - 4x, x - 1}$ .

- a) Führen Sie eine Grobuntersuchung (ohne Differentialrechnung) der Kurve durch und zeichnen Sie die Kurve.
- b) Die Gerade  $g : x = 4$ , die Kurve  $k$  und ihre schiefe Asymptote begrenzen zusammen im ersten Quadranten ein nach rechts ins Unendliche reichendes Flächenstück  $F$ . Klären Sie durch Rechnung ab, ob  $F$  einen endlichen Inhalt besitzt.
- c) Der Punkt  $P_1(0/0)$  liegt auf der Kurve  $k$ . Durch  $P_1$  wird eine Gerade  $h$  mit der Steigung  $m$  gelegt. Die Gerade  $h$  schneidet die Kurve  $k$  im Normalfall in einem zweiten Punkt  $P_2$ .
- c1) Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate  $x_2$  des Punktes  $P_2$  in Abhängigkeit von  $m$  und zeigen Sie, dass  $x_2 = \sqrt{m-4, m-1}$ .
- c2) Aus dem Resultat der Teilaufgabe c1) geht hervor, dass die Gerade  $h$  für 2 bestimmte Werte der Steigung  $m$  die Kurve  $k$  nicht in einem zweiten Punkt  $P_2$  schneidet. Für welche Werte von  $m$  trifft diese Aussage zu (Begründung!) ? Für diese Werte von  $m$  besitzt die Gerade  $h$  eine spezielle Lage bezüglich der schiefen Asymptote oder der Kurve  $k$ . Beschreiben Sie für beide Werte von  $m$  die zugehörige spezielle Lage von  $h$  in Worten!

Aufgabe 5



Ein Haus (s. Figur) soll ein Volumen (Aussenmass) von  $1000 \text{ m}^3$  erhalten. Das Dach besitzt den Neigungswinkel  $= 45^\circ$ . Die Streckenlängen  $x$  und  $a$  sind variabel.

- a) Drücken Sie die Wärme abgebende Oberfläche  $F$  des Hauses (Oberfläche ohne Grundfläche) als Funktion der Variablen  $x$  aus und zeigen Sie, dass  $F = 2,5 x^2 + 800 \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{1-x}$ .  $\rightarrow$

Aufgabe 5 (Fortsetzung)

- b) Welche Werte (in m auf 2 Stellen nach dem Komma genau) sind für die Variablen  $x$  und  $a$  zu wählen, wenn die Wärme abgebende Oberfläche  $F$  des Hauses möglichst klein sein soll? Berechnen Sie diese Oberfläche (in  $\text{m}^2$  auf 2 Stellen nach dem Komma genau).

Weisen Sie das Minimum auf 2 Arten nach:

- b1) mit den Grenzwerten der Zielfunktion am Rand des Definitionsbereichs.  
b2) mit der 2. Ableitung der Zielfunktion.

**Viel Erfolg!**