Bemerkungen: Die Prüfung dauert 4 Stunden.
Erlaubte Hilfsmittel sind Taschenrechner ohne Grafik und Programmierung und die Formelsammlung.
Bitte alle Notizen und Lösungsversuche ebenfalls abgeben !

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5
4 + 2.5 + 4.5 = 11	3 + 8 + 2 = 13	4+ 4.5+3.5 = 12	7+1+1.5+2.5 = 12	2+2+1 / 3+1.5+2.5 = 12

Aufgabe 1

Gegeben sind die drei Punkte A(10/1/3) , B(4/-2/3) und C(10/-4/-12).

a) Welchen Abstand hat der Punkt C von der Geraden g, welche durch die Punkte A und B verläuft? *(Geben Sie den Abstand exakt an.)*

b) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene α, welche durch die Punkte A, B und C verläuft?

Gegeben ist weiter die Gerade s : $\vec{r} = (0,1,3) + t \cdot (-2,1,1)$

c) Gesucht ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC, der Spitze S auf der Geraden s und der Höhe h =10 Längeneinheiten.
 c1) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
 c2) Bestimmen Sie die Koordinaten von S. *(Geben Sie alle Lösungen an.)*

Aufgabe 2

Hinweis: Die Teilaufgaben a), b) und c) lassen sich unabhängig voneinander lösen!

a) Gegeben sind die Punkte P(9/10/5) und R(11/12/1) sowie die Gerade g:
 $\vec{r} = (3,0,7) + t \cdot (3,2,-4)$.
 Bestimmen Sie den Punkt M auf der Geraden g, der von P und R den gleichen Abstand besitzt.

b) Ein von Q(19/20/-3) kommender Lichtstrahl s wird im Punkt R(11/12/1) an der Kugel k reflektiert.
 k: $(x-9)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 72$. Erstellen Sie eine Skizze!
 b1) Geben Sie eine Parametergleichung des reflektierten Strahles r an.
 b2) Berechnen Sie den Einfallswinkel α des Lichtstrahls s.
 b3) In welchem Punkt S würde der einfallende Strahl die Kugel k verlassen, wenn diese lichtdurchlässig wäre?

c) In welcher gegenseitigen Lage befinden sich die Kugeln k_1: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 225$ und k_2: $(x-10)^2 + (y-7)^2 + (z-8)^2 = 9$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3

a) Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, deren Graph den Tiefpunkt T(0/0) besitzt, die x-Achse bei $x = 12$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 108 Flächeneinheiten einschliesst. Erstellen Sie eine grobe Skizze!

Hinweis: Falls Sie die Funktionsgleichung nicht bestimmen können, dann verwenden Sie für die Fortsetzung der Aufgabe die Funktion y = - \f(1,16) x\s(3) + \f(3,4) x\s(2) .

b) b1) Berechnen Sie den Hoch- und den Wendepunkt dieser Funktion.
b2) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
b3) Zeichnen Sie die Wendetangente und den Graphen der Funktion unter Einbezug des Gegebenen und des Berechneten in ein Koordinatensystem!

c) Verbinden Sie den Tief- und den Wendepunkt durch eine Strecke.
Diese Strecke und der Graph der Funktion schliessen ein Flächenstück ein.
Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f(x) = \f(2x\s(4) - 36x\s(2) +162,x\s(4)) .

a) Untersuchen Sie diese Funktion vollständig! (Definitionsbereich, Symmetrie, Polstellen und Asymptoten, Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte.)
Wie entscheiden Sie, ob es Hoch- oder Tiefpunkte hat?
Geben Sie an, ob in den Wendepunkten ein Übergang von Links- in Rechtskurve stattfindet, oder umgekehrt.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte zwischen dem Graphen der Funktion und der Geraden $y = 2$.
(Geben Sie den Schnittpunkt exakt an.)

c) Zeichnen Sie den Graphen für $-8 \leq x \leq 8$. Eine Einheit ≙ 2 Häuschen!

d) Die Gerade $x = 3$, die Gerade $y = 2$ und der Graph der Funktion f(x) begrenzen im 1. Quadranten ein ins Unendliche reichendes Flächenstück.
Untersuchen Sie, ob sein Flächeninhalt endlich ist.
Wenn ja, dann geben Sie diesen an!
Wenn nein, dann begründen Sie dies.

Aufgabe 5

Teil 1

Eine Biologin beobachtet das Wachstum einer Bakterienkultur. Zum Zeitpunkt $t=0$ stellt sie 1600 Bakterien fest. 9 Stunden später sind es bereits doppelt soviele. Sie weiss, dass sich die Bakterien exponentiell vermehren.

a) a_1) Geben Sie das Wachstumsgesetz der Bakterien in der Form $B(t) = B_o \cdot a^t$ an!
(Berechnen Sie a auf 2 Nachkommastellen genau!)

a_2) Um wieviele Prozent wächst die Bakterienzahl pro Stunde?

b) Nach wievielen Tagen Stunden und Minuten überschreitet die Bakterienzahl die Millionengrenze?

c) Geben Sie das Wachstumsgesetz der Bakterien auch in der Form $B(t) = B_o\, e^{kt}$ an, also mit der Eulerschen Zahl als Basis . *(Berechnen Sie k auf 3 Nachkommastellen genau.)*

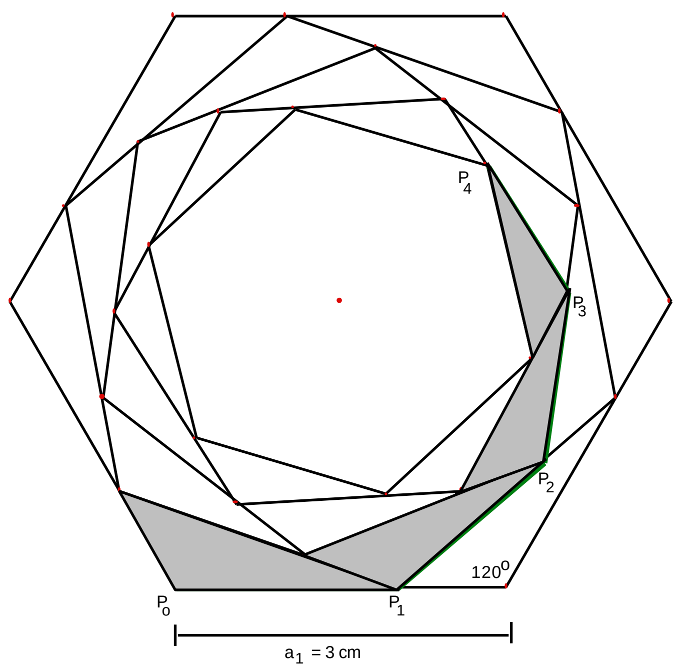
Teil 2

Gegeben ist eine unendliche Folge von einander einbeschriebenen, gedrehten, regulären Sechsecken. (Vergleiche mit der Figur unten!)
Die Punkte P_i teilen die zugehörige Sechsecksseite im Verhältnis 2:1.
Die erste (äusserste)Sechsecksseite hat die Länge $a_1 = 3$ cm.

a) Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der Folge $a(n)$ der Sechseckseiten!
(Geben Sie q exakt an.)

b) Bestimmen Sie die Gesamtlänge des grauen Streckenspiralzuges, den die Punkte P_i bilden, wenn die Figur unendlich weiter gezeichnet würde. *(Die Länge der Spirale darf gerundet werden.)*

c) Berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt der schraffierten Dreiecke, wenn die Figur unendlich weiter gezeichnet würde. (*Geben Sie den Flächeninhalt exakt an.)*



Viel Erfolg wünschen Ihnen P. Matl, E. Rast und C. von Weymanrn