GYMNASIUM LIESTAL

Maturitätsprüfung 2004
Mathematik schriftlich
Klasse 4AB

Bemerkungen : Die Lösung jeder Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für die Note 6 müssen mindestens 46 Punkte erzielt werden.
Hilfsmittel : Ein Taschenrechner (TI 89, TI 92) . TR – Handbuch. Formelsammlung.

Aufgabe 1

Wir verfolgen die Bahn einer Kugel vom Radius $R = 9$, welche auf der Ebene $E\colon\ x + 2y + 2z - 42 = 0$ nach unten rollt.

a) $M(-1 ; -4 ; 39)$ ist der Kugelmittelpunkt in der Startposition. Zeigen Sie, dass die Kugel auf der Ebene E liegt.

b) Die Kugel rollt jetzt nach unten. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Fallgerade f, auf welcher die Kugel rollt. Beschreiben Sie eine Möglichkeit, Ihr Resultat zu kontrollieren, und führen Sie diese Kontrolle durch.

c) Die Gerade $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 38 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ kann für die nach unten rollende Kugel ein Hindernis sein .

Prüfen Sie, ob das für $c = 5$ der Fall ist.
Für welche Werte von c stellt die Gerade g ein Hindernis für die rollende Kugel dar ?

Aufgabe 2

Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis AB und der Spitze C werden gleichschenklige Dreiecke MUV einbeschrieben, wobei M der Mittelpunkt von AB und UV parallel zu AB ist.

a) Welches von diesen einbeschriebenen Dreiecken MUV hat maximalen Flächeninhalt ?

b) Lösen Sie die folgende Aufgabe für $AB = 10$ und $CM = 15$:
gesucht ist die Basis UV und die Höhe auf diese Basis des einbeschriebenen Dreiecks MUV mit extremalem Umfang. Handelt es sich um ein Maximum oder Minimum ?

c) Wenn Sie die Teilaufgabe **b)** richtig gelöst haben, sind M, U und V die Höhenfusspunkte des Dreiecks ABC. Kontrollieren Sie so Ihre Lösung !

Aufgabe 3

Durch die Gleichung $y = f_a(x) = (x^2 - \frac{2x}{a})\cdot e^{ax}$, in welcher der Parameter a einen beliebigen **positiven** Wert haben darf, sind Funktionen f_a und ihre Graphen G_a gegeben.

a) Begründen Sie, dass jeder Graph G_a genau zwei Extremalstellen hat , welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

b) Berechnen Sie die Gleichungen der Kurven, auf denen die Hochpunkte bzw. die Tiefpunkte der Graphen G_a liegen.

c) In der positiven Nullstelle einer Funktion f_a wird die Tangente an den Graphen G_a gelegt. Sie schliesst mit den Koordinatenachsen ein Dreieck vom Inhalt $^4/ e$ ein. Für welchen Wert von a trifft das zu ?

d) Jeder Graph G_a schliesst mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie ihre Inhalte für $a = 1$.
Was fällt auf ? Prüfen Sie, ob Ihre Feststellung für **alle** Graphen G_a zutrifft !

Aufgabe 4

Auf einem Flughafen werden die Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Transportband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Basel hat, sei p .

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei auf dem Band hintereinander liegenden Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen Basel hat, ist 93.75 % . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p .

Wenn Sie den Wert von p nicht finden können, wählen Sie für die folgenden Teilaufgaben **b)** und **c)** p = 0.25.

b) Wir betrachten 10 hintereinander liegende Gepäckstücke. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für:

b1) Genau drei Gepäckstücke haben den Zielflughafen Basel.

b2) Das zehnte Gepäckstück ist das dritte nach Basel.

b3) Genau drei Gepäckstücke haben Basel als Zielflughafen und liegen auf dem Band direkt hintereinander.

b4) Genau drei Gepäckstücke haben Basel als Zielflughafen, wobei mindestens zwei dieser drei Gepäckstücke auf dem Band direkt hintereinander liegen.

c) 1 % der Gepäckstücke wird fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten Gepäckstücken haben 20 % den Zielflughafen Basel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird demnach ein Gepäckstück, das den Zielflughafen Basel hat, richtig weitergeleitet ?

d) Jedes Gepäckstück wird mit einem Kleber mit Strichcode gekennzeichnet, mit dessen Hilfe der Zielflughafen automatisch ermittelt wird. Das automatische Lesen misslingt in 11.5 % der Fälle, weil mindestens einer der beiden unabhängigen Fehler A: „Kleber zerknittert“ oder B: „Kleber zerrissen“ auftritt.

d1) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn der Fehler B mit einer Wahrscheinlichkeit von 8.5 % auftritt.

d2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt nur einer der beiden Fehler A oder B auf ?

Aufgabe 5

Zwei voneinander unabhängige kürzere Aufgaben :

5. 1. Durch $x^n = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$ ist für jede natürliche Zahl n eine Gleichung n – ten Grades gegeben , welche genau eine positive Lösung hat.

a) Bestimmen Sie diese Lösung für n = 1 bis n = 6.
b) Beweisen Sie, dass die Zahl 2 für keine der unendlich vielen Gleichungen eine Lösung ist.
c) Euler setzte kurzerhand $n = \infty$ und bemerkte, nun sei 2 eine Lösung der Gleichung. Geben Sie dieser Aussage einen Sinn, indem Sie die Gleichung durch x^n dividieren.

5. 2. $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1}$; $T(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4i^2 - 1}$; $U(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{4i^2 - 1}$.

a) Beweisen Sie : für grosse n ist $U(n) \approx \frac{2n + 1}{8}$.

b) Bestimmen Sie für S(n) eine Summenformel und berechnen Sie damit $\lim_{n \to \infty} S(n)$

c) $\lim_{n \to \infty} T(n) = \infty$. Begründen Sie dies, indem Sie T(n) als eine Obersumme der Funktion $y = \frac{x}{4x^2 - 1}$ auffassen (Intervallbreite 1 ! Illustrieren !) und ein Integral berechnen.