Gymnasium Liestal Maturitätsprüfung 2004

Mathematik **Klasse 4Wb**

Bemerkungen:
- *Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.*
- *Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!*
- *Die Lösungswege und TI-Befehle müssen dokumentiert werden.*
- *Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.*

Hilfsmittel:
- *Taschenrechner TI-89, TI-92 oder Voyage 200 mit Handbuch. Der Rechner darf in VAR-LINK keine Funktionen oder Programme enthalten. Es sind keine Unterordner erlaubt.*
- *Formelsammlung*

---

1. *Kurvendiskussion*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \geq 0$.

a) Skizzieren Sie den Graphen für $0 \leq x \leq 5$ und bezeichnen Sie Extremalpunkte und Wendepunkte. (1P)

b) Berechnen Sie Koordinaten des Hochpunkts exakt. (1.5P)

c) Als „Breite der Kurve" definieren wir die Differenz der x-Koordinaten der Wendepunkte. Bestimmen Sie die Breite der Kurve. (1.5P)

d) Bestimmen Sie den Inhalt der (ins Unendliche reichenden) Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird. (1P)

e) Finden Sie durch Probieren den Zusammenhang zwischen dem im Teil d) berechneten Flächeninhalt und der Zahl π. (0.5P)

Die Funktion f wird zur Schar $f_t(x) = x^2 \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}}$ mit Parameter $t > 0$ verallgemeinert.

f) Berechnen Sie den Hochpunkt und die Breite der Kurve (vgl. Aufg. c) in Abhängigkeit von t. (2P)

g) Für verschiedene Werte t ergeben sich verschiedene Hochpunkte. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Kurve, die von der Menge dieser Hochpunkte gebildet wird. Vereinfachen Sie die Funktion soweit als möglich und geben Sie sie auch gerundet an. Um welche Funktionsart handelt es sich? (2.5P)

Physikalischer Hintergrund der Aufgabe: Die Funktion $f_t(x)$ beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Luftmolekülen bei ihrer Braun'schen Bewegung (nach J.C. Maxwell 1831-1879). $f_t(x)$ ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül mit der Geschwindigkeit x bewegt. Der Verlauf der Kurve hängt von der Temperatur t ab.

2. *Extremwertproblem*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)^b}$ mit a ≥ 0 und b = 1 oder 2.

Zwischen x-Achse und Kurve wird ein gleichschenkliges Dreieck eingefügt. Die Grundlinie des Dreiecks liegt auf der x-Achse, wobei der linke Eckpunkt im Ursprung liegt und der rechte auf der positiven x-Achse im Punkt $P_0(x/0)$, x > 0. Die Spitze des Dreiecks liegt auf dem Graphen von f(x).

a) Zeichnen Sie die Situation für a = 1, b = 1 und $P_0(3/0)$. Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche. (2P)

b) Zeigen Sie, dass mit b = 2 für jedes a ein Dreieck mit extremalem Flächeninhalt existiert. Ist das Extremum ein Maximum oder ein Minimum?
Bestimmen Sie nun die extremale Fläche in Abhängigkeit von a. (5P)
Hinweis: Wenn Sie die Aufgabe nicht allgemein lösen können, so wählen Sie a = 2. (2.5 von 5P)

c) Untersuchen Sie die Situation für b = 1. (3P)
Hinweis: Machen Sie deutlich, inwiefern sich die Resultate von der letzten Teilaufgabe b) grundsätzlich unterscheiden.

3. Vektorgeometrie

Ein Lichtstrahl g: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fällt von aussen auf die Mantelfläche eines verspiegelten, geraden Zylinders mit der Körperhöhe h und dem Radius r und wird im Punkt S(-3/2/4) in die Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ reflektiert. Der Punkt S befindet sich auf der Mantelfläche auf halber Körperhöhe. Die Symmetrieachse des Zylinders verläuft durch den Punkt A(6/8/13).

a) Zeigen Sie, dass der Punkt S auf dem Lichtstrahl liegt. (1P)

b) Wie gross ist der Winkel zwischen dem Strahl g und dem reflektierten Strahl? (2P)

Fortsetzung folgt auf der nächsten Seite!

c) Finden Sie den Normalenvektor $\vec{n}$ im Punkt S, der senkrecht auf der Tangentialebene T des Zylinders steht. (2P)

Hinweis: Der Richtungsvektor von g und der Vektor $\vec{b}$ *haben die gleiche Länge.*

d) Wie lautet die Koordinatengleichung der Tangentialebene T? (1.5P)
Hinweis: Falls Sie die Aufgabe c) nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *weiter.*

e) Berechnen Sie den Radius r des Zylinders exakt. (1.5P)

f) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkts M des Zylinders auf der Zylinderachse? M befindet sich in der Mitte zwischen den beiden Deckflächen. (2P)
Falls Sie die Aufgabe e) nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $r = 3\sqrt{6}$ *weiter.*

4. *Unabhängige Aufgaben zur Stochastik*

a) Nach der Fabrikation eines Metallstücks wurden folgende Masse in cm gemessen:
12.55; 12.57; 12.51; 12.46; 12.52; 12.48; 12.50; 12.49; 12.53; 12.50
Berechnen Sie den Mittelwert und den Median. Die Firma will die Genauigkeit mit zwei Standardabweichungen angeben. Welche Genauigkeit teilt sie den Käufern also mit? Zeichnen Sie auch das Balkendiagramm bei einer Klassenbreite von 0.02 cm. (3P)

b) Begründen Sie $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ für die Variation ohne Wiederholung. (1P)

c) Wie viele Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Worts ‚wirtschaftsklasse' bilden? (1.5P)

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Spielen mit einem Würfel hintereinander alles 6-er zu würfeln? (1.5P)

e) Ein Vater will mit seinen 2 Kinder und 3 Göttikindern in das Theater um das Märchen ‚Peter Pan' zu sehen. Es sind noch 2 Reihen mit 3 bzw. a Plätzen frei. Auf wie viele Arten kann man alle Personen verteilen,
e_1) mit a = 3? (1P)
e_2) mit a = 4 und wenn alle mindestens jemanden der Gruppe neben sich sitzen haben? (2P)

5. *Unabhängige Aufgaben aus verschiedenen Gebieten*

Folgen und Reihen

5.1. Zauberlehrling Harry Potter hat eine Kiste mit unendlich vielen Bauklötzen in Würfelform (es soll hier angenommen werden, dass das Material beliebig oft teilbar ist). Der grösste Würfel hat eine Kantenlänge von 10 cm. Der jeweils nächst kleinere besitzt eine Kantenlänge, die um 20% geringer ist als sein Vorgänger. Von jeder Grösse gibt es nur einen Klotz.

a) Wie hoch ist der Turm, den Harry maximal bauen kann? (1P)

b) Wie viele Klötze sind nötig, um einen Turm zu bauen, der um höchstens 1 mm kleiner ist als der maximal mögliche? (2P)

Extremwertproblem

5.2. Die Stadt A befindet sich direkt am Meer einer schnurgeraden Küste. Die von A 12.8 km entfernte Stadt B liegt in einem schwer zugänglichen Gebiet 8.0 km vom Meer entfernt. Die Einwohner beider Städte vereinbaren, eine gemeinsame Meerwasserentsalzungsanlage direkt am Meer mit zwei geraden Zuführungsrohren der Länge a und b zu den Städten A und B zu bauen. Die Kosten pro km für das Verlegen der Pipeline entlang der Meeresküste sind halb so teuer wie zur Stadt B.

Wie sind die Strecken a und b zu wählen, so dass die Baukosten für die Pipeline möglichst gering sind? (5 Punkte)

Rotationsvolumen

5.3. Bei der Rotation der Funktion $f(x) = (1-x)\cdot\sqrt{x}$ um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper. Wie gross ist sein Volumen? (2P)

Viel Erfolg wünschen Dr. R. Ugolini, Dr. U. Dammer, M. Erdin, D. Fagan, Dr. C. Freiburghaus, M. Montero und B. Zemp! ☺