

- Bemerkungen: Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden  
Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.  
Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein.
- Hilfsmittel: CAS-Taschenrechner mit Anleitung und Formelsammlung.  
Der Rechner muss im Auslieferungszustand sein  
(Menu **Var-Link** leer, keine Unterordner)

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
10	10	10	10	6+4	50

## Aufgabe 1: Rationale Funktion

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{x^3+x^2+4}{2x^2}$ , wobei  $x \neq 0$ .

- a) Berechnen Sie (ohne Benutzung der GRAPH-Funktion des Taschenrechners) von dieser Funktion die Nullstelle, den Tiefpunkt  $(x_T \mid y_T)$  und die Gleichung der nicht vertikalen Asymptote  $g$ . (2P.)
- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , die den Graphen von  $f(x)$  in deren Nullstelle und deren Tiefpunkt berührt. (2P.)
- c) Berechnen Sie *von Hand* den Flächeninhalt der nach rechts ins Unendliche reichenden Fläche zwischen dem Graphen von  $f(x)$ , der Geraden  $x = x_T$  und der Asymptoten  $g$ . (2P.)
- d) Für jedes  $t > 0.5$  schneidet die Gerade  $h : y = 0.5x + t$  den Graphen von  $f(x)$  in zwei Punkten  $P_t$  und  $Q_t$ .
- i) Berechnen Sie die Koordinaten von  $P_t$  und  $Q_t$ . (1P.)
- ii) Weisen Sie nach, dass die  $y$ -Achse jedes Dreieck  $OP_tQ_t$  in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt. (1.5P.)
- e) Welche Funktion  $h(x) = \frac{x^3+bx^2+4c}{dx^2}$  hat als Asymptote die Gerade mit der Gleichung  $y = \frac{1}{3}x - 1$  und an der Stelle  $x = 3$  eine Extremalstelle? (1.5P.)

## Aufgabe 2: Vektorrechnung

Die dreieckige Grundfläche einer Pyramide ist definiert durch die Eckpunkte  $A(-2 \mid 3 \mid 1)$ ,  $B(4 \mid -1 \mid 2)$  und  $C(1 \mid -2 \mid -3)$ . Die Spitze  $D$  liegt in der Ebene  $E : 3x - 2y + z - 6 = 0$ .  $S$  ist der Schwerpunkt der Grundfläche ( $S$  ist der Schnittpunkt der Schwerlinien; eine Schwerlinie ist die Strecke von einer Ecke zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite) und die Strecke  $\overline{SD}$  steht senkrecht zur Grundfläche.

- a) Zeichnen Sie die Ebene  $E$  mit Hilfe der Spuren im Schrägbild. (1.5P.)
- b) Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  der Grundfläche beim Eckpunkt  $A$ . (1P.)
- c) Bestimmen Sie den Inhalt der Grundfläche. (1P.)
- d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes  $S$  der Grundfläche. (1P.)

*Hinweis: Wenn Sie den Schwerpunkt  $S$  nicht finden, rechnen Sie mit  $S(1 \mid 0 \mid 0)$  weiter.*

- e) Geben Sie die Koordinatengleichung der Grundfläche an. (1.5P.)
- f) Welche Koordinaten hat die Spitze  $D$ ? (1.5P.)

*Hinweis: Wenn Sie den Punkt  $D$  nicht finden können, rechnen Sie mit  $D(8 \mid 9 \mid -6)$  weiter.*

- g) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (1P.)
- h) Die Pyramide wird nun gedreht und mit der Fläche  $ACD$  auf die  $xy$ -Ebene gestellt. Eine Kugel wird so auf die Seitenfläche  $ABC$  gestellt und festgehalten, dass sie im Punkt  $B$  die Fläche  $ABC$  berührt. Sie wird losgelassen und rollt dabei auf der Fläche  $ABC$  entlang einer Berührgeraden  $f$  (Falllinie) nach unten.  
Wie weit von  $A$  entfernt schneidet  $f$  die  $xy$ -Ebene? (1.5P.)

### Aufgabe 3: Anwendungen der Wirtschaft

Ein landwirtschaftlicher Betrieb, der unter den Bedingungen der vollkommenen Konkurrenz Weizen erzeugt, erhält für den Weizen einen Preis von 12GE je 1ME. Zur Ermittlung der Gesamtkosten wurden aufgrund einer Kalkulation die folgenden Wertepaare ermittelt:

Menge $x$ in ME	0	2	4	6
Gesamtkosten $y_K(x)$ in GE	16	22	25	46

- a) Für die Gesamtkosten ist mit Hilfe der Wertepaare für das Intervall  $0 \leq x \leq 8$  eine ganzrationale Funktion dritten Grades zu bestimmen und in ein Koordinatensystem einzuzeichnen. (2P.)
- b) Die Funktionen für den Gesamterlös und den Gesamtgewinn sind zu bestimmen und in dasselbe Koordinatensystem von a) einzuzeichnen. (1.5P.)
- c) Die Gewinnschwelle und der Maximalgewinn sind rechnerisch und graphisch zu bestimmen. (2.5P.)

Die Produkte werden ans Ausland verkauft. Pro Mengeneinheit ME wird ein Zoll  $r$  in GE erhoben.

- d) Berechnen Sie für  $r_1 = 1, r_2 = 3$  und  $r_3 = 5$  den Maximalgewinn und die zugehörige Gesamtsteuer. (2P.)
- e) Bis zu welchem Zoll  $r_{max}$  pro Mengeneinheit ME lohnt sich die Produktion von Weizen für den landwirtschaftlichen Betrieb? (2P.)

*Hinweis zu den Einheiten: Für  $x$  ist  $1ME = 10^4 kg$  und für die Funktionswerte  $y(x)$  gilt  $1GE = Fr. 10^3.-$*

## Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die 12 Flächen eines als ideal angenommenen, regulären Dodekaeders sind mit den folgenden Zahlen beschriftet:

'1', '1', '2', '2', '2', '3', '3', '4', '4', '4', '4', '5'.



- Das Dodekaeder wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, keine '4' zu werfen. (1P.)
- Das Dodekaeder wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen gerade ist. (2P.)
- Das Dodekaeder wird 7-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal eine '3' zu werfen. (2P.)
- Wie oft muss das Dodekaeder geworfen werden, um mit der Wahrscheinlichkeit von 99.9% mindestens eine '5' zu werfen? (2P.)
- Jetzt wird um Geld gespielt. Ein Spiel besteht aus zwei Würfeln. Der Einsatz pro Spiel ist Fr. 2.–. Der Spieler gewinnt das Spiel, wenn die Augenzahl im 2. Wurf höher ist als diejenige des 1. Wurfes, andernfalls gewinnt die Bank. Wenn der Spieler gewinnt, werden ihm Fr. 5.– ausbezahlt (Einsatz + Gewinn), wenn er verliert, geht der Einsatz an die Bank. Berechnen Sie den mittleren Gewinn oder Verlust des Spielers. (3P.)

## Aufgabe 5: Zwei, von einander unabhängige Aufgaben aus verschiedenen Gebiete

### a) Logarithmus

Die Temperatur  $\Theta$  (in  $^{\circ}\text{C}$ ) eines Ofens ist gegeben durch die Temperaturfunktion

$$\Theta(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0.1t} \quad (e \text{ ist die EULERSche Zahl})$$

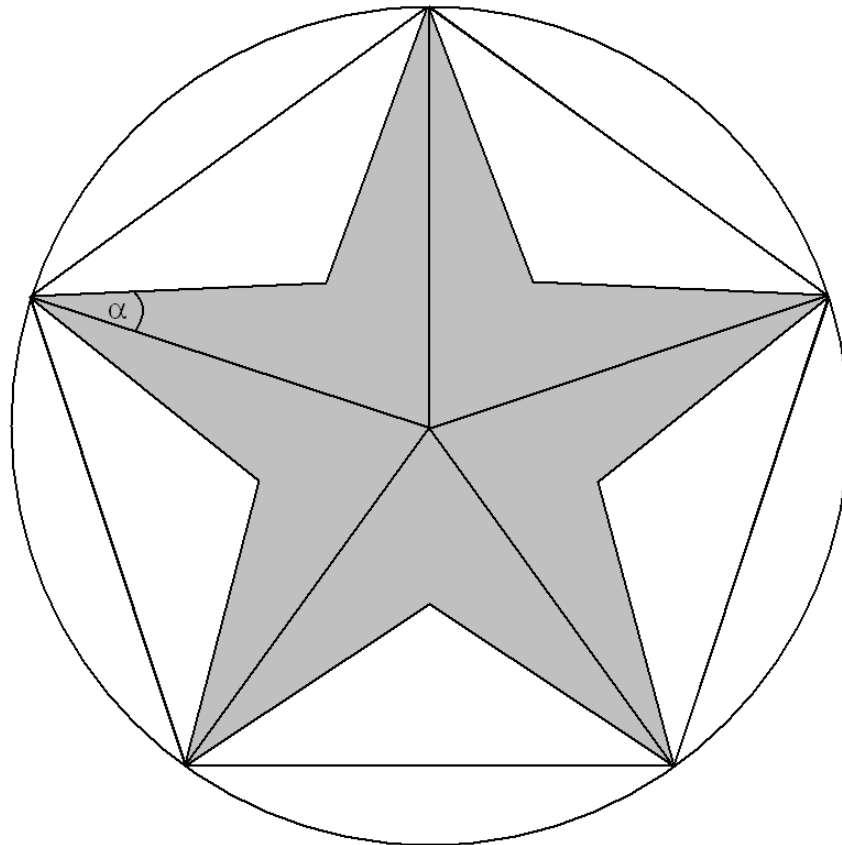
wobei die Zeit  $t$  in Minuten gegeben ist. Der Ofen wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltet.

- Zu welchem Zeitpunkt  $t$  erreicht der Ofen die Temperatur  $\Theta = 150^{\circ}\text{C}$ ? (1P.)
- Welches ist die momentane Temperaturänderung in  $^{\circ}\text{C}/\text{min}$ , wenn der Ofen die Temperatur  $150^{\circ}\text{C}$  aufweist? (1P.)
- Bei welcher Temperatur  $\Theta$  beträgt die Zuwachsrate der Temperatur  $10^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ? (2P.)

b) **Trigonometrie**

Dieser regelmässige Stern besitzt den Umkreisradius 20cm. Sein Flächeninhalt ist halb so gross, wie der Flächeninhalt des regelmässigen Fünfecks.

- i) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  des Sterns. (2P.)
- ii) Wie gross ist der Winkel  $\alpha$  ? (2P.)
- iii) Berechnen Sie den Umfang des Sternes? (2P.)



Viel Erfolg wünschen Ihnen Maria Montero, Thomas Blott, Dorothy Fagan, Guido Lafranchi,  
Raphael Ugolini und Constantin von Weymann!

# Lösungen

## Aufgabe 1: Rationale Funktion

- a)  $x_N = -2$ ;  $T((2 | 2))$ ;  $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$       b)  $p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- c)  $\int_2^\infty [f(x) - g(x)]dx = \int_2^\infty [\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2})]dx = \int_2^\infty [\frac{2}{x^2}]dx = [-\frac{2}{x}]_2^\infty = 1$
- d) i)  $P_t(\frac{2}{\sqrt{2t-1}} | \frac{1}{\sqrt{2t-1}} + t)$  und  $Q_t(-\frac{2}{\sqrt{2t-1}} | -\frac{1}{\sqrt{2t-1}} + t)$ .  
ii) Die gemeinsame Strecke auf der y-Achse beträgt 0.5. Die Höhen auf diese Dreiecksseiten sind  $|x_P| = |x_Q| = \frac{2}{\sqrt{2t-1}} \Rightarrow F = \frac{0.5(\frac{2}{\sqrt{2t-1}})}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2t-1}}$
- e)  $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + \frac{27}{2}}{3x^2}$

## Aufgabe 2: Vektorrechnung

- a) -      e)  $E : 7x + 9y - 6z - 7 = 0$
- b)  $\alpha = 48.66^\circ$       f)  $D(-6 | -9 | 6)$
- c)  $F = \frac{\sin \alpha \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{2} = 19.33$       g)  $V = \frac{F \cdot \sqrt{166}}{3} = 83$
- d)  $S(1 | 0 | 0)$       h)  $x = \cos \alpha \cdot \overline{AB} = 4.81$

## Aufgabe 3: Anwendungen der Wirtschaft

- a)  $y_K(x) = \frac{7}{16}x^3 - 3x^2 + \frac{29}{4}x + 16$
- b)  $y_E(x) = 12x$ ;  $y_G(x) = y_E(x) - y_K(x) = -\frac{7}{16}x^3 + 3x^2 + \frac{19}{4}x - 16$
- c)  $x_A = 1.82, x_B = 7.65$ ;  $x_M = 5.26, y(x_M) = 28.32$
- d)  $y_{G_r}(x) = -\frac{7}{16}x^3 + 3x^2 + (\frac{19}{4} - r)x - 16$        $y'_{G_r}(x_M) = 0$  und  $y''_{G_r}(x_M) < 0$   
 $r_1 = 1$ ;  $y_{G_1}(x_M) = 23.12$ ;  $R(x) = x_M \cdot r = 5.13$   
 $r_2 = 3$ ;  $y_{G_1}(x_M) = 13.14$ ;  $R(x) = x_M \cdot r = 14.54$   
 $r_3 = 5$ ;  $y_{G_1}(x_M) = 3.76$ ;  $R(x) = x_M \cdot r = 22.65$
- e)  $r_{max} = 5.84$

## Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- a)  $\frac{4}{9}$       c) 0.234      e) Verlust von 9 Rappen pro Spiel
- b)  $\frac{37}{72}$       d) 80

## Aufgabe 5: Zwei, von einander unabhängige Aufgaben aus verschiedenen Gebieten

- a) **Logarithmus**  
i)  $t = 12.8$       ii)  $5^\circ C/min$       iii)  $\Theta = 100.0^\circ C$
- b) **Trigonometrie**  
i)  $A_{\text{Stern}} = 475.53 \text{cm}^2$       ii)  $\alpha = 19.46^\circ$       iii)  $U = 142.71 \text{cm}$