Mathematik

Classes 4FIS/4GL/4MS/4SZ/4Wa/4Wb/5KSW

Remarques: La durée de l'examen est de 4 heures.
Commencez chaque exercice sur une nouvelle feuille.

Moyens: Calculatrice, formulaire et un dictionnaire français-allemand.

Répartition des points:

Exercice	1	2	3	4	5	6	Total
Points	8	5	10	12	10	5	50

Exercice 1: Analyse

Soit f une fonction polynomiale qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $f(4) = 2$,

(ii) $f'(4) = 0$,

(iii) $f''(x) < 0$ pour tout $x \in R$,

(iv) $\int_0^6 f(x)dx = 0$.

Justfiez de façon précise et complète vos réponses aux questions suivantes.

a) Combien f a-t-elle de points d'inflexions? (1P.)

b) Combien f a-t-elle d'extremums? (2P.)

c) Combien f a-t-elle de zéros? (2P.)

d) Déterminez une fonction f qui satisfait toutes les conditions de (i) a (iv). (3P.)

Exercice 2: Désintégration

Une substance chimique est chauffée. Au temps $t = 0$ la substance commence à brûler. Sa masse $m(t)$, dont la valeur est $m(0)$ au temps $t = 0$, diminue au cours du temps selon la loi:

$$m(t) = m(0) \cdot \frac{2e^t}{1 + e^{2t}} \qquad (t \text{ en minutes})$$

Donnez tous vos résultats dans ce qui suit avec une précision d'une décimale.

a) Quelle pourcentage de la masse initiale a été brûlée aprés 1 minute? (1P.)

b) Après combien de minutes 99.9 % de la substance a été brûlée? (1P.)

La dérivée de la fonction $m(t)$ s'interprète comme la vitesse de combustion de la masse m (*la vitesse à laquelle brûle la masse*).

c) Quelle est la vitesse de combustion de ce processus chimique au temps $t = 0$? (1P.)

d) À quel instant t la vitesse de combustion est-elle en valeur absolue la plus grande? (1P.)

e) Comparez vos résultats c) et d) avec les propriétés d'une désintégration exponentielle. (1P.)

Exercice 3: Fonction logarithme

a) Soit la famille de courbes donnée par l'équation

$$y = f_a(x) = \frac{k \cdot \ln(x+1)}{(x+1)^2} \qquad \text{pour } x \geqslant 0 \text{ et } k > 0.$$

a1) Tracez le graphe de la courbe de cette famille correspondant à $k = 10$. (1P.)

a2) Montrez que toutes les fonctions de la famille de courbes ont un extremum de coordonnée x identique.
Que valent les valeurs y de ces extremums? (1P.)

a3) Déterminez k de façon que l'aire A_a du morceau de surface F_a qui s'étend à l'infini et qui est délimité par la fonction $f_a(x)$ et l'axe-x ait une le valeur de 9. (1P.)

a4) Quelle est la valeur du volume V_a engendré par la rotation autour de l'axe-x du morceau de surface F_a ci-dessus? Pour cette partie d'exercice la valeur $k = 9$ est utilisée.

(1P.)

Les parties d'exercices b) et c) suivantes peuvent être résolues indépendamment l'une de l'autre. Pour ces dernières la valeur $k = 9$ est aussi utilisée.

b) Déterminez pour la fonction d'équation

$$y = f_b(x) = \frac{p \cdot q^3 \cdot x}{(x+q)^3} \qquad \text{pour } x \geqslant 0 \text{ et } q > 0$$

les coefficients p et q de façon que

- le graphe de $f_a(x)$ et $f_b(x)$ ont la même pente pour $x = 0$ et
- l'aire A_b du morceau de surface F_b, qui s'étend à l'infini et qui est délimité par le graphe de $f_b(x)$ et par l'axe-x, a la même valeur que A_a.

(3P.)

c) Soit la fonction donnée par l'équation

$$y = f_c(x) = \frac{5x}{(x+1)^2} \qquad \text{pour } x \geqslant 0.$$

c1) Calculez pour la fonction $f_c(x)$ l'aire A_c du morceau de surface F_c qui s'étend à l'infini et qui est délimité par le graphe de $f_c(x)$ et l'axe-x.

c2) Quelle est la valeur du volume V_c obtenu par rotation du morceau de surface F_c autour de l'axe-x?

c3) Justifiez le résultat de A_c en déterminant les fonctions intégrales de $f_a(x)$ et $f_c(x)$, soit respectivement $I_a(x) = \int_0^x f_a(t)dt$ et $I_c(x) = \int_0^x f_c(t)dt$, ainsi que leur comportement quand $x \to \infty$.

(3P.)

Exercice 4: Géométrie Vectorielle

a) Soit le plan $\epsilon : x + 2y + 2z = 12$, ainsi que les points $P(6 \mid 1 \mid 2)$ et $F_1(12 \mid 5 \mid 4)$.

a1) Dessinez la trace du plan ϵ dans un système de coordonnées. (1P.)

a2) Démontrez ensuite que P appartient au plan ϵ et marquez ce point sur votre dessin. (1P.)

a3) Déterminez les coordonnées d'un point S du plan ϵ dont la distance au point F_1 est la plus petite. (2P.)
(Si vous n'y parvenez pas, utilisez le point $S(8 \mid 2 \mid 0)$ pour le reste de l'exercice).

b) Les parois, le plafond et le sol d'une chambre de forme cubique sont donnés par les trois paires de plans suivants:

$$x = 0 \text{ und } x = 12 \qquad y = 0 \text{ und } y = 12 \qquad z = 0 \text{ und } z = 12.$$

Au travers de la chambre il y a une toile d'araignée (*Spinnennetz*) qui se situe dans le plan ϵ (unité: mètre).

b1) Deux mouches posées sur les parois de la chambre ne peuvent pas se voir car une araignée située au point P, sur sa toile, fait obstacle. La première mouche se trouve au point F_1, la seconde est sur une des parois au point $F_2(a \mid 0 \mid b)$. Déterminez la position de la seconde mouche, c'est-à-dire les nombres a et b. (2P.)
Si vous n'y parvenez pas, utilisez le point $F_2(3.6 \mid 0 \mid 3.2)$ pour le reste de l'exercice.

b2) L'araignée se déplace sur sa toile jusqu'au point S. De cette position l'araignée parvient encore tout juste à conserver les deux mouches dans son champ de vision. Quelle est la largeur de son champ visuel, c'est-à-dire : quel est l'angle, au degré près, de son champ visuel? (1P.)

b3) L'araignée ne peut se déplacer que sur sa toile, les parois, le plafond et le sol de la chambre et se situe en S. Elle est rapide et peut attraper la mouche en F_1 si la distance à parcourir jusqu'à cette dernière est inférieure à 7.5 mètres. L'araignée se demande, avant de se déplacer, si elle est capable de capturer la mouche. À quelle conclusion parvient-elle? Justifiez votre réponse par des calculs. (2P.)

b4) Avant que l'araignée aie pu terminer sa réflexion, la mouche découvre un trou dans la toile au point H et vole en ligne droite en direction de ce trou le long du vecteur

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez les coordonnées du point H. Déterminez également les coordonnées du point N (un point de la trajectoire de la mouche situé entre F_1 et H) qui est le plus proche de l'araignée affamée située en S. (3P.)

Exercice 5: Probabilités

La poste électronique (e-mail) est un des moyens de communication les plus importants aujourd'hui pour les entreprises. De façon inamicale, une publicité indésirable par e-mail appelée Spam, représente une grosse partie de l'ensemble du trafic des e-mails.

Pour protéger l'utilisateur du flot (*Flut*) de spams, les fournisseurs de services d'e-mails utilisent des filtres de spams. Ces derniers examinent tous les e-mails entrants et déterminent s'il s'agit d'un e-mail souhaité ou d'un spam. Cela permet ainsi un tri des e-mails qui sont ensuite placés dans deux dossiers différents appartenants au destinataire (*Empfänger*) : un dossier "*Posteingang*" pour les e-mails souhaités et un dossier "*Spam-Ordner*" pour les spams.

a) Une méthode largement répandue pour déjouer les filtres de spams était jusqu'à récemment le mélange des lettres d'un mot. Calculez le nombre d'arrangements différents de lettres obtenus par l'utilisation de cette méthode sur le mot „`haarausfall`". (1.5P.)

b) Anna trouve dans son dossier "*Spam-Ordner*" 15 e-mails avec des attachés (*Anhang*). Parmi ceux-là, quatre contiennent un virus qui se répand dans l'ordinateur quand l'attaché est ouvert. Anna ouvre au hasard l'attaché de trois e-mails. Quelle est la probabilité qu'Anna active au moins un virus? (1.5P.)

Selon une statistique datant de février 2007, 81 % des e-mails envoyés sont des Spams et seulement 19 % sont des e-mails désirés. Plus un filtre de spams est capable d'identifier comme spam un e-mail qui est effectivement un spam plus il est efficace; de même, moins il désigne, par erreur, un e-mail désiré comme spam plus il est efficace. Les meilleurs filtres de spams actuels reconnaissent 99.97 % des spams comme tels et ne se trompent que dans 0.025 % en classant comme spam des e-mails souhaités.

c) Une grosse firme reçoit chaque jour 250′000 e-mails. Combien d'e-mails désirés sont perdus chaque jour par la firme dû l'intervention du filtre de spams? (2P.)

d) Quelle est la probabilité qu'un e-mail reçu par un employé dans le dossier "*Posteingang*" soit un spam? Construisez pour cela un diagramme en arbre. (3P.)

   Dans le cas où vous ne parvenez pas résoudre le problème, effectuez les calculs qui suivent en utilisant une probabilité de 0.128 % d'avoir un spam dans le dossier "*Posteingang*".

e) Un employé a dans son dossier "*Posteingang*" 200 e-mails. Quelle est probabilité qu'il trouve parmi ces derniers exactement trois spams? (2P.)

Exercice 6: Arithmétique

Soit un nombre d'exactement dix chiffres qui satisfait les exigences suivantes :

- Chaque chiffre de 0 à 9 apparaît exactement une fois.
- Les nombres construits à partir des n premiers chiffres sont divisibles par n sans qu'il y aie de reste ($n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$).

Nous cherchons ce nombre.

"Mauvais exemple": Le nombre de dix chiffres 1234567890, dans lequel chaque chiffre apparaît exactement une fois, est certe

	1	divisible par 1,
	12	divisible par 2,
	123	divisible par 3,
mais	1234	n'est pas divisible par 4.

Seule une des propositions partielles a) à f) qui suivent correspond au nombre recherché. Pour chacune des propositions inexactes montrez de quelle façon les exigences ne sont pas satisfaites. Trouvez la proposition partielle qui satisfait toutes les conditions et déterminez entièrement le nombre recherché.

```
(a)   3 0 9 6 _ _ _ _ _ _
(b)   3 _ 5 6 _ _ _ _ _ 0
(c)   3 _ _ 6 _ 4 7 _ _ _
(d)   3 8 _ 9 5 _ _ _ _ _
(e)   _ 8 _ _ _ 4 7 6 _ _
(f)   _ 8 _ 6 _ _ 7 _ 1 _
```

(5P.)

Nous vous souhaitons BONNE CHANCE! Maria Montero, Thomas Blott, Bernhard Felder, Andreas Immeli, Guido Lafranchi, Eric Lucas, Mic Rasmussen.