Maturitätsprüfungen 2023 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4(A)W, 4(A)We, 4Ba, 4Bb, 4IMS, 4KSW, 4SZ, 4W
Lehrpersonen: ErM, FrC, HnR, HuR, KiA, PaS, RoL

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-*n*spire CX im Press-to-Test-Modus oder TI-30X Pro
	Formelsammlung *Fundamentum Mathematik und Physik*, ohne Notizen

---

In denjenigen Teilaufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Teilaufgabe zu erhalten, müssen Sie in diesen Fällen auf das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen, auf das Berechnen vom Skalar- und vom Kreuzprodukt mit den entsprechenden Befehlen und auf die Befehle nSolve und polyRoots (auf dem TI-*n*spire CX) bzw. num-solv und poly-solv (beim TI-30X Pro) verzichten.
Die Teilaufgaben, die man in diesem Sinn **von Hand** lösen muss, werden mit dem Symbol ✍ gekennzeichnet.
Im Allgemeinen beschränkt sich die Benutzung des Graphikfensters auf die Visualisierung von Funktionen.

Aufgabe 1: Vektorgeometrie (13 Punkte)

Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer geraden Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze $S(0|0|1)$. Die Punkte A, B und S definieren die Seitenflächenebene F.

(a) Tragen Sie die Punkte in die Skizze auf dem Beiblatt ein. Geben Sie die Koordinaten der Ecke D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem. Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an. (2 P.)

(b) Beweisen Sie, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. (1 P.)

(c) Leiten Sie eine Koordinatengleichung der Seitenflächenebene F her.
(Endresultat zur Kontrolle: $F: x + y - 2z + 2 = 0$) (2 P.)

(d) Welchen Winkel bilden zwei benachbarte, an der Spitze S zusammenlaufende Kanten? (1.5 P.)

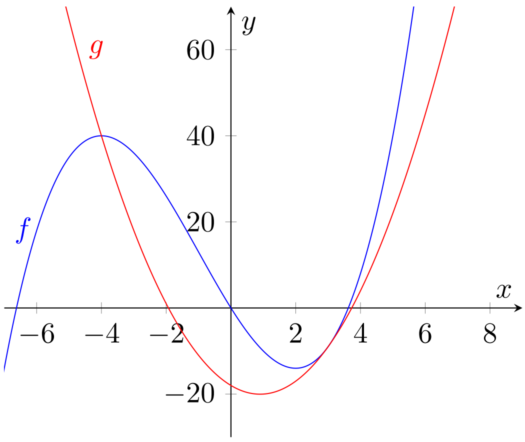
(e) Die Gerade durch die Punkte $P(13|7|-7)$ und $Q(8|4|-2)$ schneidet die Seitenflächenebene F im Punkt T. Bestimmen Sie den Schnittpunkt T. Liegt er innerhalb oder ausserhalb der dreieckigen Seitenfläche ABS der Pyramide? Begründen Sie. (3 P.)

(f) Die Spitze der Pyramide sei nun frei beweglich auf der z-Achse. Wir suchen diejenigen Positionen $\overline{S}$, so dass Pyramiden entstehen, deren Seitenflächenebenen $AB\overline{S}$ die Winkelhalbierendenebenen zwischen der Grundfläche und der ursprünglichen Seitenflächenebene F sind. Welche der Positionen $\overline{S}$ liegt innerhalb der ursprünglichen Pyramide? (3.5 P.)

Aufgabe 2: Analysis (12 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 18$$



✍ (a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Bestätigen Sie die Art der Extrema rechnerisch. (7 P.)

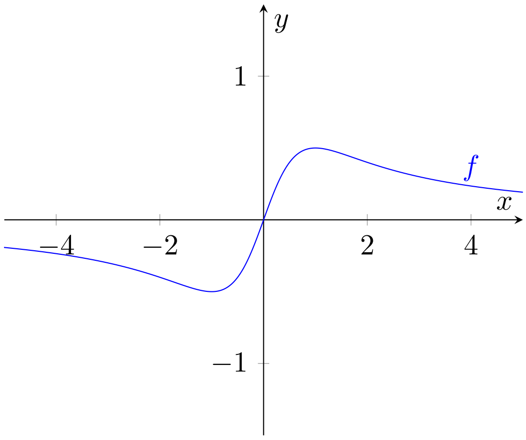
✍ (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f bei $x = -2$. (1.5 P.)

(c) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g bei $x = 3$ berühren. (1 P.)

✍ (d) Die Graphen von f und g schneiden sich auch bei $x = -4$ und schliessen eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt. (2.5 P.)

Aufgabe 3.1: Analysis (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.



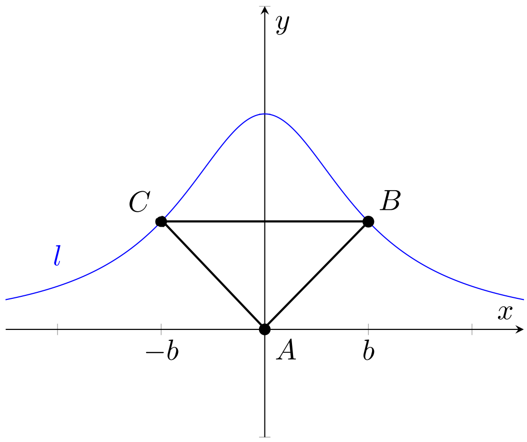
(a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie. (1 P.)

(b) Berechnen Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote und erklären Sie, wieso f keine vertikale Asymptote besitzt. (1.5 P.)

(c) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{x^4+2x^2+1}$ die Gleichung der Ableitung von f ist. (1.5 P.)

(d) Die Funktion f und die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ schneiden sich bei $S(1|0.5)$. Berechnen Sie den Schnittwinkel in diesem Punkt. (2 P.)

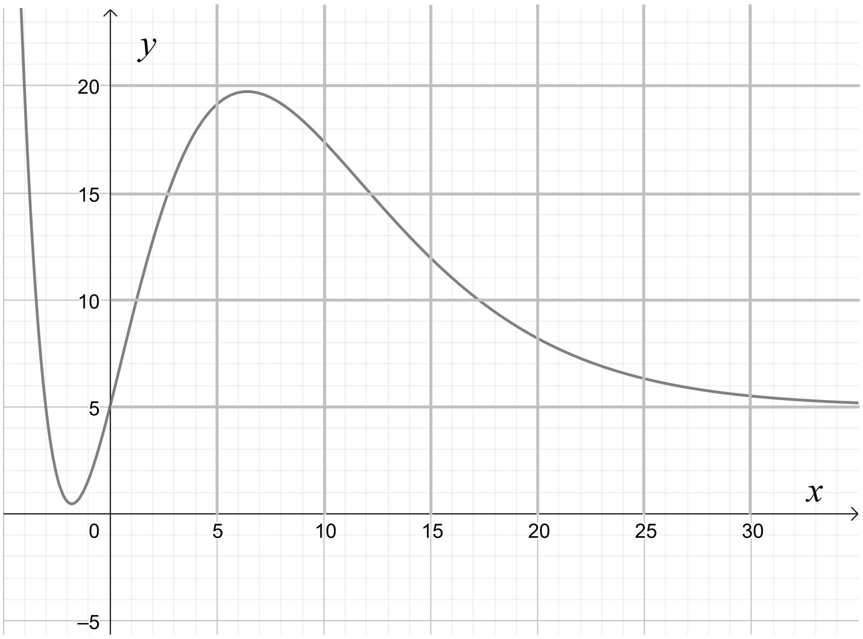
(e) Wir betrachten nun den Graphen der Funktion l mit der Gleichung $l(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.



In diesen Graphen wird ein gleichschenkliges Dreieck eingeschrieben, das die Ecken $A(0|0)$, $B(b|l(b))$ und $C(-b|l(-b))$ (mit $b > 0$) besitzt. Rotiert dieses Dreieck um die y-Achse, so entsteht ein Kreiskegel. Welche Werte kann dieses Kegelvolumen annehmen? (2 P.)

Aufgabe 3.2: Analysis (4 Punkte)

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Alle Extrem- und Wendepunkte befinden sich im gezeichneten Bereich, $y = 5$ ist waagrechte Asymptote.



Die folgenden zwei Aufgaben beziehen sich auf den Graphen der Ableitungsfunktion f'. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Geben Sie die ungefähren x-Werte an, an denen der Graph der Ableitungsfunktion f' Hoch- oder Tiefpunkte besitzt. (1 P.)

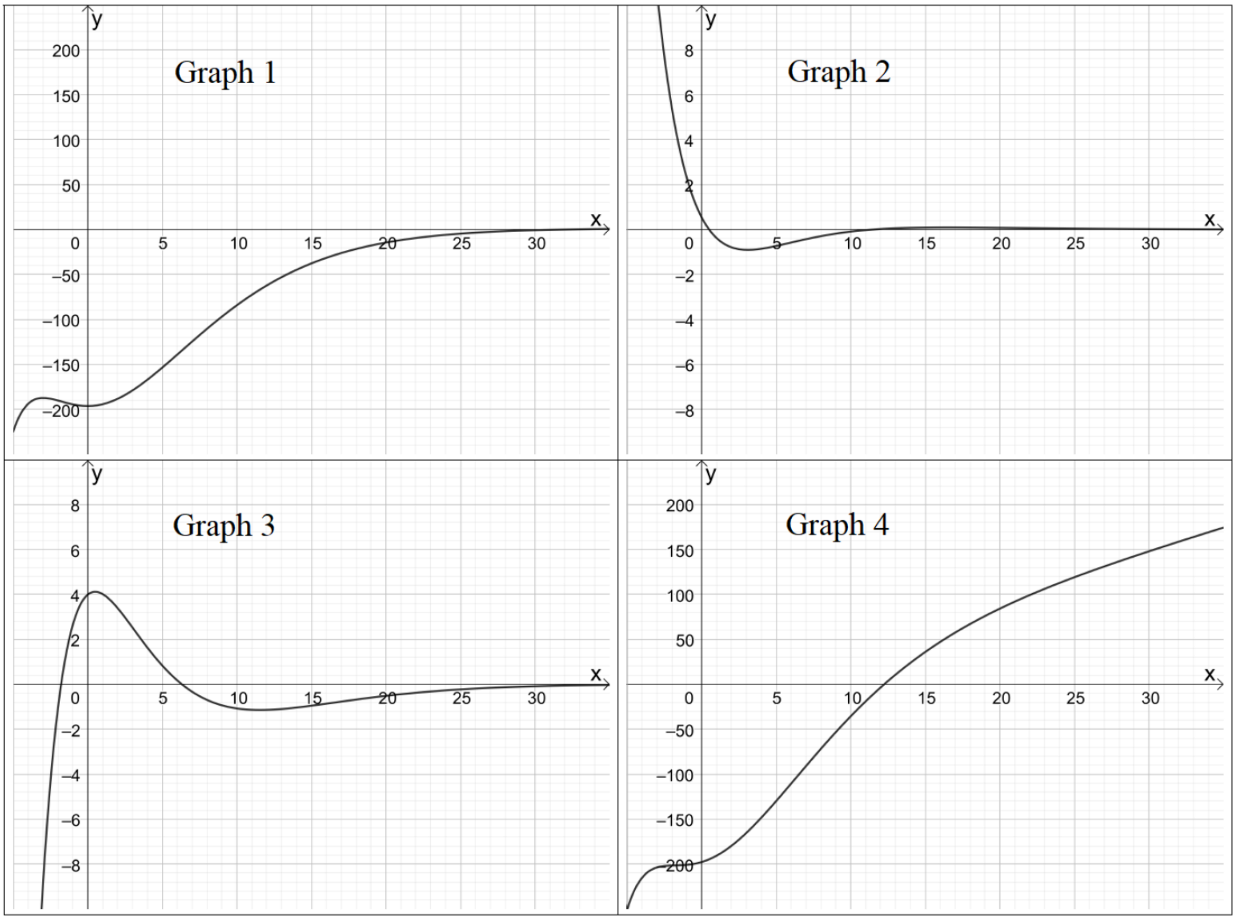
(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$. (1 P.)

Die folgenden zwei Aufgaben beziehen sich auf das Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

(c) Geben Sie einen Näherungswert für $\displaystyle\int_5^{10} f(x)\,dx$ an. (1 P.)

Beachten Sie die Fortsetzung der Aufgabe 3.2 auf der nächsten Seite!

(d) Welcher der vier folgenden Graphen stellt eine Stammfunktion F von f dar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 P.)



Aufgabe 4: Stochastik (13.5 Punkte)

Die Aufgabe besteht aus drei unabhängigen Teilaufgaben.

Aufgabe 4.1

Sie möchten Wale in freier Wildbahn beobachten und buchen deswegen eine Whale-Watching-Tour. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Tour Wale sehen werden, beträgt 60%. Der Touranbieter offeriert Ihnen aber gratis eine zweite Tour, wenn Sie beim ersten Mal keine Wale beobachten können.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie im Rahmen dieses Angebots Wale sehen? (1.5 P.)

(b) Wie viele Touren müssen Sie mindestens machen, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal Wale beobachten können? (2 P.)

Aufgabe 4.2

Zwei Teams A und B tragen ein Volleyballspiel aus. Sieger ist, wer zuerst zwei Sätze gewinnt. Team A ist nominell stärker. Die Wahrscheinlichkeit, einen Satz gegen B zu gewinnen, beträgt 55%. Gewinnt A einen Satz, so steigt die Gewinnchance im nächsten um 5 Prozentpunkte, verliert A, so reduziert sie sich um 5 Prozentpunkte.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Team A eine Partie auf zwei Gewinnsätze für sich entscheidet? (3 P.)

(b) Ein Anhänger von Team B liegt krank zu Hause und erhält von einem Kollegen eine kurze Nachricht: "Team B hat soeben einen Satz gewonnen. Das Spiel geht weiter." Er kennt die Gewinnregel und weiss sonst nichts über den Spielverlauf. Wie gross ist unter dieser Bedingung die Chance, dass B auch das Spiel gewinnt? (3 P.)

Aufgabe 4.3

«Dame» ist ein Strategiespiel für zwei Personen, das auf den schwarzen Feldern eines Schachbretts gespielt wird.

Abbildung 1: Startposition für «Dame»

Die beiden Spieler:innen erhalten je 12 Spielsteine, schwarz oder weiss. Die einzelnen schwarzen Spielsteine können nicht voneinander unterschieden werden. Gleiches gilt für die weissen.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 12 schwarze Spielsteine einzeln auf verschiedene der 32 schwarzen Felder zu verteilen? (1 P.)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 12 schwarze und 12 weisse Spielsteine einzeln auf verschiedene schwarze Felder des Spielbretts zu verteilen? (vgl. Startposition in der Abbildung, die eine Möglichkeit darstellt) (1.5 P.)

(c) An einem «Dame»-Turnier nehmen 12 Spieler:innen teil. Alle erhalten am Schluss einen Preis. Der Veranstalter hat Tickets für 5 verschiedene Kinovorführungen organisiert. Es sind genügend viele Tickets von allen Vorführungen vorhanden, sodass alle Spieler:innen beliebig wählen können. Die drei Erstplatzierten können je 2 Tickets zu zwei verschiedenen Vorführungen wählen, die anderen neun je 1 Ticket. Auf wie viele Arten können die Spieler:innen ihre Tickets wählen? (1.5 P.)

Aufgabe 5 (12.5 Punkte)

5.1 Trigonometrie

Zwei Bauern haben zwei aneinandergrenzende Grundstücke mit einer Grenzlinie von A über B nach C.

Diese soll durch eine neue Grenzlinie DC so begradigt werden, dass sich die Flächeninhalte der Grundstücke nicht ändern. Damit die neue Grenzlinie DC gezogen werden kann, muss die Strecke $\overline{AD}$ berechnet werden. Die beiden Bauern können im Voraus die folgenden Grössen bestimmen:

Die beiden Strecken: $\overline{AB} = 282\,\mathrm{m}$ und $\overline{BC} = 145\,\mathrm{m}$.
Die beiden Winkel: $\gamma = 52°$ und $\varepsilon = 74°$

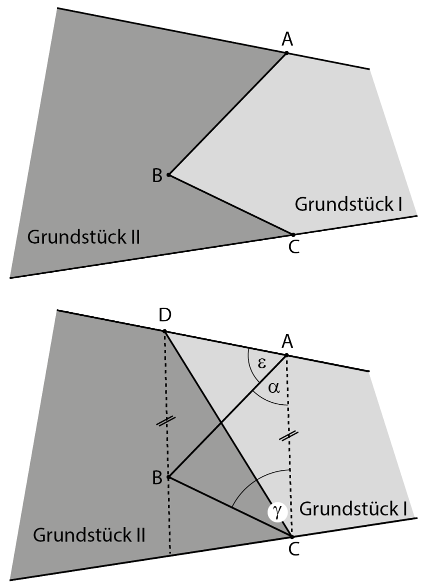


Abbildung 2: Situationsplan

(a) Berechnen Sie den Winkel α. (1.5 P.)

(b) Die in Abbildung 2 gezeichneten Linien durch die Punkte A und C sowie durch B und D sind parallel. Begründen Sie! (1 P.)

(c) Berechnen Sie die Strecke $\overline{AD}$. (2.5 P.)

5.2 Logarithmusgleichung

✍ Berechnen Sie die Lösungsmenge der folgenden Logarithmusgleichung:

$$\log_2(x-6) + \log_2(2x) = 5$$

(3 P.)

5.3 Exponentieller Zerfall

Der Wirkstoff einer Tablette wird im menschlichen Körper exponentiell abgebaut. Unmittelbar nach der vollständigen Resorption befinden sich $800\,\mathrm{mg}$ des Wirkstoffs im Körper, nach 10 Stunden noch $60\,\mathrm{mg}$.

(a) Wie viel Wirkstoff ist nach 16 Stunden noch im Körper? (1.5 P.)

(b) Nach welcher Zeit ist noch die Hälfte des Wirkstoffs im Körper (Halbwertszeit)? (1 P.)

Ein Patient bekommt ein anderes Medikament mit $400\,\mathrm{mg}$ Wirkstoff pro Tablette, welcher gemäss der Funktion $m(t) = m_0 \cdot 0.65^t$ abgebaut wird, wobei t für die verstrichene Zeit in Stunden steht. Ihm wird folgendes verabreicht: Um 8:00 Uhr eine Tablette, um 14:00 Uhr zwei Tabletten, um 20:00 Uhr eine Tablette.

(c) Wie viel Wirkstoff hat er am nächsten Morgen um 8:00 Uhr vor Resorption der Tablette noch im Körper? (2 P.)

Beiblatt