Maturité 2023 – Examen écrit de mathématiques

Classe : 4SIf

Enseignant : ZuA

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-$n$spire CX, en mode *Press-to-Test*
	Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik*), sans annotations
	Dictionnaire français-allemand

Les calculs des questions précédées du symbole ✍ doivent être faits **à la main**. Pour ces questions, seules les fonctionnalités élémentaires de la calculatrice sont autorisées. Pour obtenir la totalité des points dans ce cas, il faudra travailler **sans** utiliser les fonctions telles que *dotP*, *crossP*, *nSolve*, *polyRoots*, ainsi que le calcul numérique de dérivées ou d'intégrales.
La fenêtre graphique ne doit alors être utilisée que pour visualiser les graphes de fonctions.

Exercice 1 : Géométrie vectorielle (13 points)

Les points $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ et D se trouvent dans le plan Π et constituent la base carrée $ABCD$ d'une pyramide droite $ABCDS$ de sommet $S(0|0|1)$. Les points A, B et S définissent le plan Γ de la face latérale correspondante.

(a) Représenter les points sur le système de coordonnées de la page 8. Déterminer les coordonnées du point D puis décrire la position particulière du plan Π dans le système de coordonnées. Donner une équation cartésienne du plan Π. (2 P.)

(b) Montrer que le triangle ABS est isocèle[1]. (1 P.)

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan Γ. (2 P.)
(Résultat final pour contrôle : $x + y - 2z + 2 = 0$)

(d) Calculer l'angle formé par deux arêtes[2] voisines qui se rejoignent[3] au sommet S. (1,5 P.)

(e) La droite qui passe par les points $P(13|7|-7)$ et $Q(8|4|-2)$ coupe le plan Γ en T. Déterminer le point d'intersection T. Ce point se trouve-il à l'intérieur ou à l'extérieur de la face triangulaire latérale ABS de la pyramide ? (3 P.)

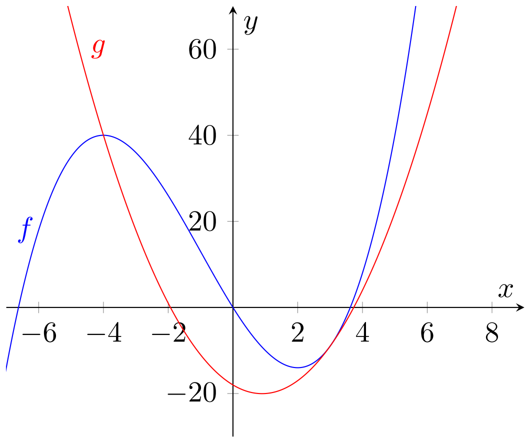
(f) Le sommet S peut maintenant se déplacer librement sur l'axe z. On cherche les positions S^* pour lesquelles le plan ABS^* est un plan bissecteur[4] des plans Π et Γ. Laquelle des positions S^* se trouve à l'intérieur de la pyramide initiale ? (3,5 P.)

1. *gleichschenklig*
2. *Kanten*
3. *zusammenlaufen*
4. *Winkelhalbierendenebene*

Exercice 2 : Analyse (12 points)

Soient les fonctions f et g données par les expressions :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 18$$



(a) Déterminer les zéros de f, le point maximum, le point minimum et le point d'inflexion du graphe de f. Confirmer par le calcul les natures des points extremums. (7 P.)

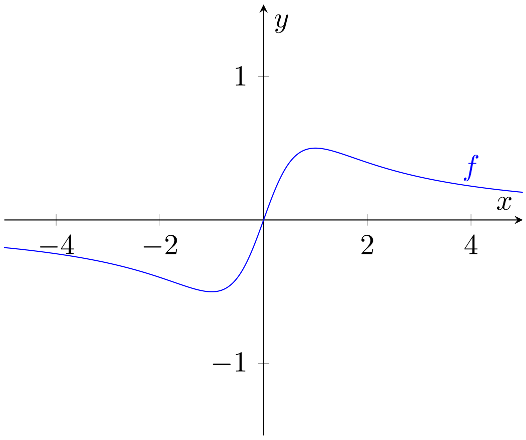
(b) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en $x = -2$. (1,5 P.)

(c) Montrer que les graphes de f et de g sont tangents en $x = 3$. (1 P.)

(d) Les graphes de f et de g se coupent également en $x = -4$ et délimitent une surface fermée. Calculer l'aire de cette surface. (2,5 P.)

Exercice 3.1 : Analyse (8 points)

On considère la fonction f qui a pour expression $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.



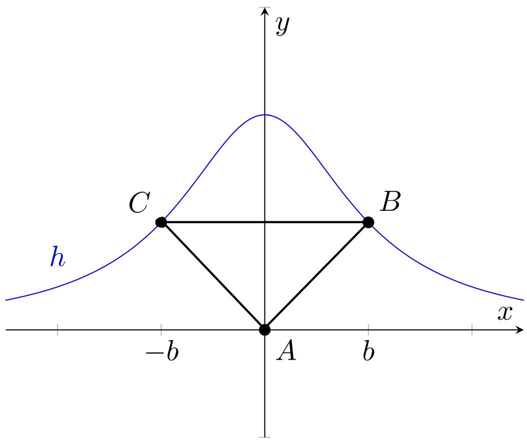
(a) Le graphe de f présente-t-il une symétrie et si oui, laquelle ? Justifier par le calcul. (1 P.)

(b) Déterminer l'équation de l'asymptote horizontale au graphe de f et expliquer pourquoi il n'y a pas d'asymptote verticale. (1,5 P.)

(c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{x^4+2x^2+1}$ est l'expression de la dérivée de f. (1,5 P.)

(d) La fonction f et la fonction g qui a pour expression $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ se coupent en $S(1|0{,}5)$. Calculer l'angle d'intersection en ce point. (2 P.)

(e) On considère maintenant le graphe de la fonction h qui a pour expression $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

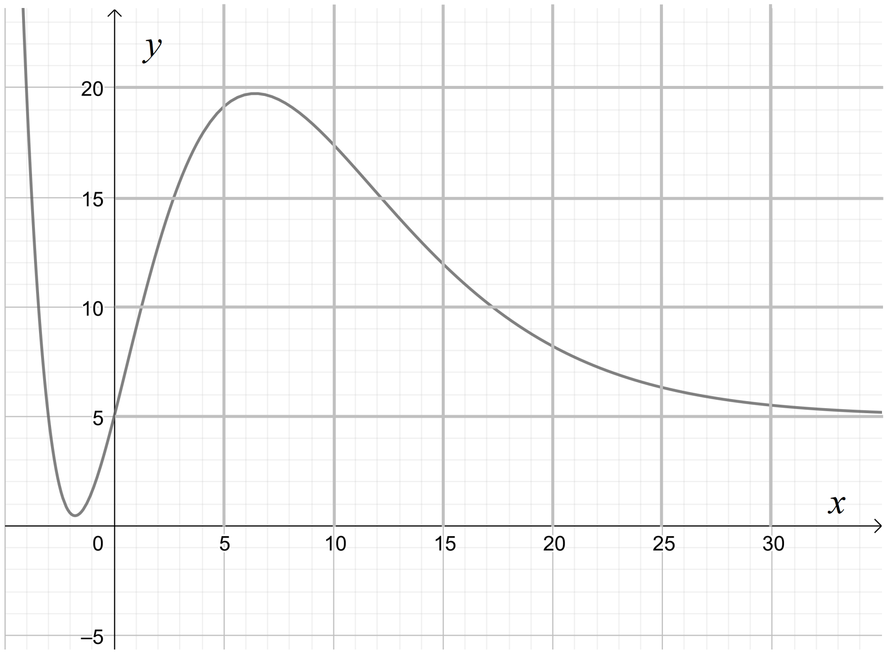


On inscrit sous ce graphe un triangle isocèle[5]. Les sommets de ce triangles sont les points $A(0|0)$, $B(b|h(b))$ et $C(-b|h(-b))$ (avec $b > 0$). La révolution (rotation) de ce triangle autour de l'axe y engendre un cône circulaire[6]. Dans quel intervalle se trouvent les valeurs possibles du volume de ce cône ? (2 P.)

5. *gleichschenklig*
6. *Kreiskegel*

Exercice 3.2 : Analyse (4 points)

On considère la fonction f représentée ci-dessous. Tous les points extremums et les points d'inflexion se trouvent dans la zone dessinée. Le graphe de f a pour asymptote horizontale $y = 5$.



Les deux questions suivantes se rapportent au graphe de la fonction dérivée f'. Justifier les réponses dans chaque cas.

(a) Donner les valeurs approximatives x pour lesquelles le graphe de la **dérivée** f' présente des points maximums ou des points minimums. (1 P.)

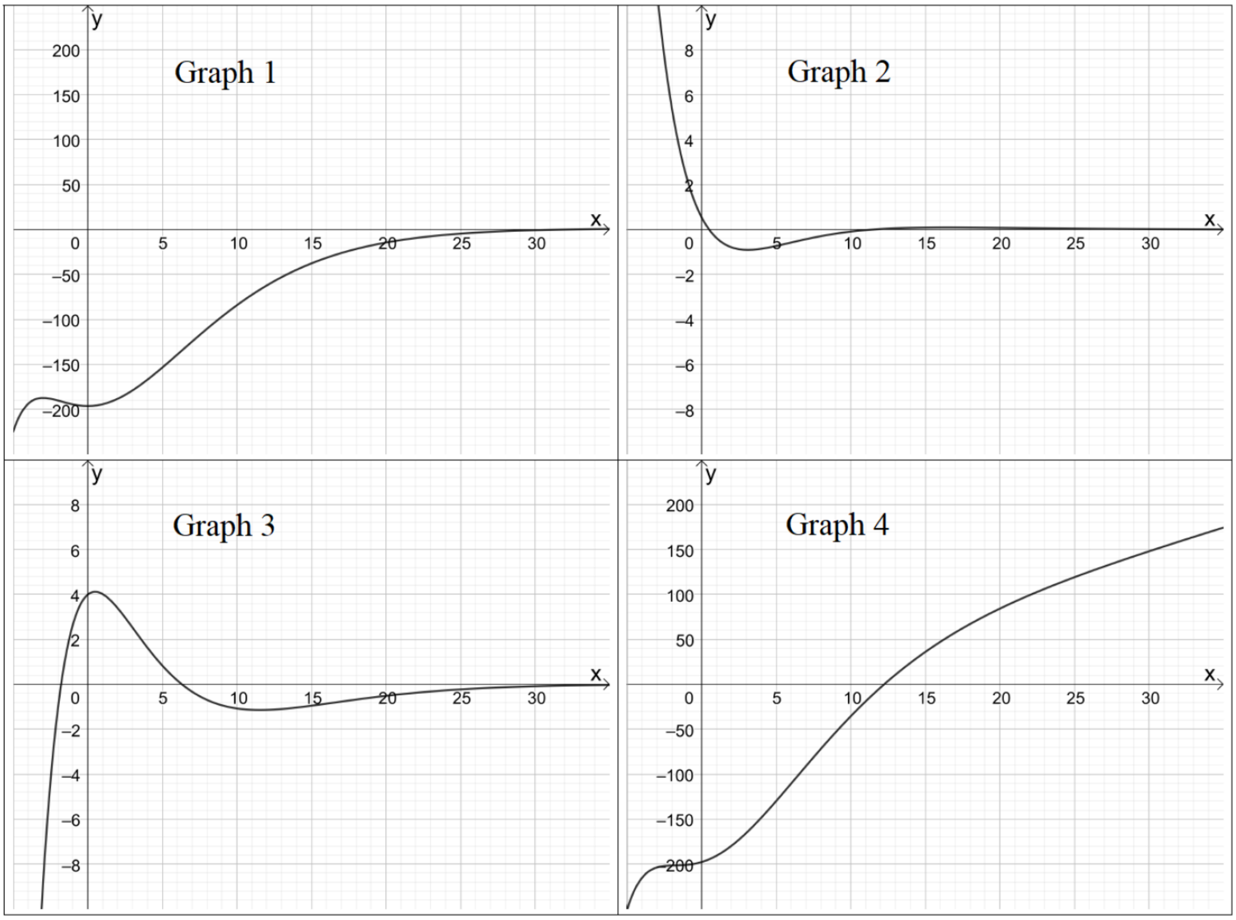
(b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$. (1 P.)

Les deux questions suivantes se rapportent à l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Donner une valeur approchée de $\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$. (1 P.)

Attention : l'exercice 3.2 continue à la page suivante !

(d) Parmi les quatre graphes suivants, lequel représente une fonction primitive F de f ? Justifier la réponse. (1 P.)



Exercice 4 : Combinatoire et probabilité (13,5 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 4.1

Vous souhaitez observer des baleines [7] en liberté, et pour cela vous réservez une excursion. La probabilité de voir des baleines pour chaque excursion est de $60\,\%$.

(a) Le tour-opérateur [8] vous offre une deuxième excursion si vous n'avez pas vu de baleines la première fois. Avec cette offre, quelle est la probabilité de voir des baleines ? (1,5 P.)

(b) Combien d'excursions devriez vous faire pour que la probabilité de voir au moins une fois des baleines soit supérieure à $99\,\%$? (2 P.)

Exercice 4.2

Deux équipes A et B font un match de volley-ball. Le vainqueur est celui qui remporte en premier deux sets [9]. L'équipe A est considérée plus forte : la probabilité de gagner un set contre l'équipe B est de $55\,\%$. Cependant si l'équipe A gagne un set, sa probabilité de gagner le set suivant augmente de 5 points de pourcentage. À l'inverse, si elle perd un set, cette probabilité diminue de 5 points de pourcentage.

(a) Quelle est la probabilité de victoire pour l'équipe A ? (3 P.)

(b) Un supporter de l'équipe B est malade à la maison et apprend par message que l'équipe B vient de gagner un set. Le jeu continue, mais on ne sait rien d'autre. Quelle est dans ce cas la probabilité que l'équipe B gagne le jeu ? (3 P.)

Exercice 4.3

« Les dames » est un jeu de stratégie pour deux personnes qui se joue sur les cases noires d'un plateau appelé damier [9].

Les deux joueurs reçoivent chacun 12 pions [10], noirs ou blancs. Les pions noirs ne peuvent pas être distingués les uns des autres. Il en va de même pour les pions blancs.

Image 1 : positionnement de départ aux dames

(a) De combien de façons peut-on positionner 12 pions noirs sur les 32 cases noires du damier ? (1 P.)

(b) De combien de façons peut-on positionner les 12 pions noirs et les 12 pions blancs sur les 32 cases noires du damier ? (L'image 1 est un exemple de disposition possible.) (1,5 P.)

(c) 12 joueurs participent à un tournoi de dames. Chacun des 12 joueurs reçoit un prix. Pour cela, l'organisateur a organisé des tickets pour 5 séances de cinéma différentes. Il y a suffisamment de billets pour chaque projection [12] pour que les joueurs puissent choisir librement.

Les trois premiers joueurs peuvent choisir 2 billets pour deux projections différentes, et les neuf autres joueurs peuvent choisir seulement 1 billet chacun. Combien de répartitions différentes des billets sont possibles, si le classement des joueurs est déjà établi [13] ? (1,5 P.)

7. *Wale*
8. *Touranbieter*
9. *zwei Sätze*
9. *Schachbrett*
10. *Spielsteine*
12. *Vorführung*
13. *feststeht*

Exercice 5 (12,5 points)

Exercice 5.1 Trigonométrie

Deux agriculteurs ont deux terrains contigus[12] avec une ligne de séparation de A à C, en passant par B.

La séparation doit être modifiée par une nouvelle ligne de séparation DC sans changer les aires de chaque terrain. Pour pouvoir tracer la nouvelle ligne DC, il faut calculer la distance $\overline{AD}$. Les deux agriculteurs ont pu déterminer les grandeurs suivantes :

Les deux longueurs : $\overline{AB} = 282\,\mathrm{m}$ et $\overline{BC} = 145\,\mathrm{m}$.
Les deux angles : $\gamma = 52°$ et $\varepsilon = 74°$

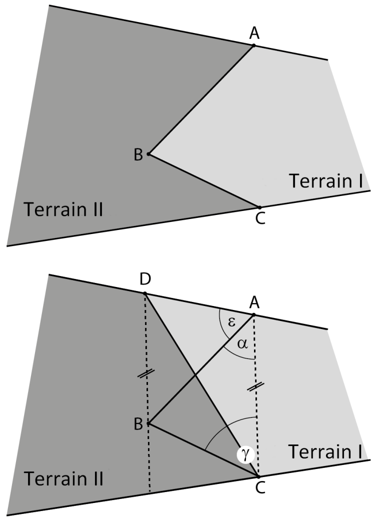


Image 2 : plan de la situation

(a) Calculer l'angle α. (1,5 P.)

(b) Dans la 2e figure, les lignes tracées en pointillés AC et BD sont parallèles. Justifier cette affirmation. (1 P.)

(c) Calculer la longueur $\overline{AD}$. (2,5 P.)

Exercice 5.2 Équation logarithmique

✍ Résoudre l'équation suivante : (3 P.)

$$\log_2(x-6) + \log_2(2x) = 5$$

Exercice 5.3 Décroissance exponentielle

La substance active d'un comprimé[15] est dégradée de manière exponentielle dans le corps humain. Immédiatement après l'absorption d'un comprimé, $800\,\mathrm{mg}$ de principe actif sont présents dans l'organisme. Après 10 heures, il en reste encore $60\,\mathrm{mg}$.

(a) Quelle quantité de principe actif est présente dans l'organisme 16 heures après absorption d'un comprimé ? (1,5 P.)

(b) Après combien de temps reste-t-il la moitié du principe actif initial ? (C'est la demi-vie[16].) (1 P.)

Un patient reçoit un autre médicament contenant $400\,\mathrm{mg}$ de principe actif qui diminue dans l'organisme selon la fonction $m(t) = m_0 \cdot 0{,}65^t$, où t est le temps écoulé en heures après absorption. Pour la prise des comprimés, il suit l'ordonnance suivante :
À 8 h 00 : un comprimé, à 14 h 00 : deux comprimés et à 20 h 00 : un comprimé.

(c) Quelle quantité de principe actif est présente dans l'organisme de ce patient le lendemain matin, à 8 h 00 ? (2 P.)

12. *zwei aneinandergrenzende Grundstücke*
15. *Der Wirkstoff einer Tablette*
16. *Halbwertszeit*

Système de coordonnées relatif à l'exercice 1(a)