Maturitätsprüfungen 2023 – Mathematik schriftlich

Klasse: 4AW (Profil A)
Lehrperson: KrD

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-*n*spire CAS im Press-to-Test-Modus
	Formelsammlung *Formeln, Tabellen, Begriffe* vom Orell Füssli Verlag, ohne Notizen

Die Prüfung sieht insgesamt 53 Punkte vor. Die **Aufgaben 1–3**, die auf farbigen Blättern gedruckt sind, müssen **ohne Taschenrechner** gelöst werden. Diese Aufgaben umfassen 26.5 Punkte, d.h., sie entsprechen genau 50% der Prüfung.

Erst nach Abgabe der Lösungen zu den Aufgaben 1–3 (inkl. der farbigen Aufgabenblätter) dürfen Sie Ihren Taschenrechner nehmen und für die weiteren Prüfungsteile einsetzen.

Viel Erfolg wünschen Ihnen Robyn Steiner-Curtis und Dennis Krüger.

Aufgabe 1: Analysis (6.5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die vollständigen Koordinaten aller Wendepunkte des Graphen von

$$p(x) = 3x^5 - 5x^4 + 7x$$

(2.5 P.)

(b) Jetzt betrachten wir die rationale Funktion

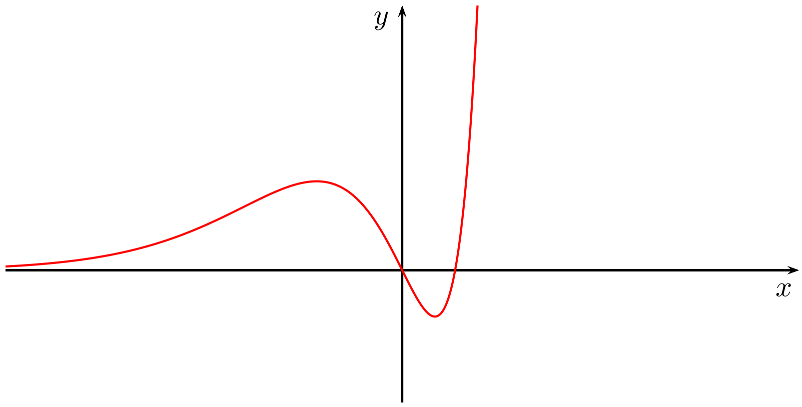
$$f(x) = \frac{x^6 - 5x^3}{2x^4 + 2x^2 - 12}$$

i. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f und diskutieren Sie die Art ihrer Definitionslücken ohne Berücksichtigung von eventuellen Vorzeichenwechseln. (2.5 P.)

ii. An welche asymptotische Kurve nähert sich der Graph von f? (1.5 P.)

Aufgabe 2: Analysis (13.5 Punkte)

Unten abgebildet ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion $g(x) = (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{0.5x}$, wobei e die Eulersche Zahl darstellt.



(a) Begründen Sie, dass der Graph von g die x-Achse nur zweimal schneidet. (0.5 P.)

(b) Zeigen Sie, dass die Ableitung von g wie folgt geschrieben werden kann:

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - 2\right)\mathrm{e}^{0.5x}$$

(1.5 P.)

(c) Sei P der rechte Schnittpunkt des Graphen von g mit der x-Achse, und sei ℓ die Tangente des Graphen von g am Punkt P. Wo und unter welchem Winkel schneidet ℓ die y-Achse?
Hinweis: Da Sie für diese Teilaufgabe keinen Taschenrechner zur Verfügung haben, können Sie keinen numerischen Wert für den Winkel berechnen. Stattdessen sollten Sie einen mathematischen Ausdruck für den Winkel angeben. (2 P.)

(d) Geben Sie eine Polynomfunktion an, dessen Graph die x-Achse ebenfalls am Ursprung und am Punkt P schneidet und an diesen Punkten die gleiche Steigung wie der Graph von g aufweist. (4.5 P.)

(e) Wie gross ist der Inhalt der Fläche, die im zweiten Quadranten des Koordinatensystems zwischen dem Graphen von g und der x-Achse liegt?
Hinweis: Falls Sie keine Stammfunktion von g bestimmen konnten, rechnen Sie mit der (falschen) Stammfunktion $G(x) = (3x^3 - 2x^2 + 6)\mathrm{e}^{0.5x}$ weiter. (5 P.)

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen (6.5 Punkte)

Auf dem Gebiet der *komplexen Dynamik* ist folgende Funktion sehr berühmt:

$$f(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } z \neq 0$$

(a) Berechnen Sie den Funktionswert $f(1 + i)$. Geben Sie Ihre Antwort in der Summendarstellung $a + bi$ an. (2.0 P.)

(b) Bestimmen Sie die alle komplexen Zahlen z, die die Gleichung $f(z) = 0$ erfüllen. Formulieren Sie ihre Antworten in der Polarform $z = r\mathrm{e}^{\varphi i}$. (2.0 P.)

(c) Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ folgende Gleichung gilt:

$$f(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot z) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot f(z)$$

(2.5 P.)

Für die restlichen Aufgaben 4–6 dürfen und sollen Sie den vollen Funktionsumfang Ihres Taschenrechners einsetzen.

Aufgabe 4: Vektorgeometrie (10 Punkte)

Gegeben sind der Mittelpunkt $M(-1;0;6)$ und der Radius $R = 7$ der Kugel K sowie die Punkte $A(3;-6;-3)$ und $B(5;-2;3)$. Der Punkt B liegt auf der Kugel K.

(a) Berechnen Sie die Stellen, an denen die Kugel K die x-Achse des Koordinatensystems schneidet. (1 P.)

(b) Liegt der Punkt A auf, innerhalb oder ausserhalb der Kugel K? (1 P.)

(c) Sei g die Gerade, die durch die Punkte A und B verläuft, und sei E_1 die Tangentialebene zur Kugel am Punkt B. Berechnen Sie den Winkel zwischen g und E_1. (2 P.)

(d) Berechnen Sie den Abstand von der Ebene mit Koordinatengleichung $E_2 : 12x - 5y = 157$ zur Kugel K. (1.5 P.)

Im Folgendem betrachten wir alle Tangenten der Kugel K, die durch den ausserhalb der Kugel liegenden Punkt $P(-5;-6;18)$ verlaufen. Diese Tangenten bilden einen (unendlichen) Kegel $\mathcal{C}$. Die Menge aller Berührungspunkte von den Tangenten mit der Kugel ist ein Kreis $\mathcal{K}$ mit Radius r und dem Mittelpunkt N.
Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben können auf verschiedenen Wegen mit Hilfe der Elementar- und Vektorgeometrie beantwortet werden. Achten Sie deshalb darauf, einen möglichst effektives Lösungenverfahren zu wählen.

(e) Zeigen Sie, dass der Öffnungswinkel vom Kegel $\mathcal{C}$ genau $60°$ beträgt. (1.5 P.)

(f) Bestimmen Sie den Radius r und den Mittelpunkt N des Kreises $\mathcal{K}$. (3 P.)

Aufgabe 5: Reihen und Folgen (5 Punkte)

In einer Nachrichtensendung wird behauptet:

> *"Bleibt der jährliche Weltgasverbrauch auch in den kommenden Jahren konstant, so reichen nach aktuellen Schätzungen die bekannten Gasvorräte noch 65 Jahre. Deshalb schlägt die UNO-Vollversammlung vor, den weltweiten Gasverbrauch jährlich um 2% im Vergleich zum Vorjahresverbrauch zu reduzieren."*

Angenommen, der aktuelle jährliche Weltgasverbrauch belaufe sich auf a Kubikmeter und alle Behauptungen der Nachrichtensendung wären korrekt.

(a) Wie viele Kubikmeter Gas wären insgesamt nach 30 Jahren verbraucht worden, wenn im ersten Jahr a Kubikmeter Gas verbraucht werden und danach laut dem Vorschlag der UNO-Versammlung sukzessive reduziert wird? Stimmt es, dass nach 30 Jahren ungefähr noch zwei Drittel der weltweiten Gasreserven vorhanden wären? (2.5 P.)

(b) Begründen Sie rechnerisch, dass mit dieser Massnahme der jährlichen Reduktion um 2% die vorhandenen Gasvorräte in Zukunft niemals ausgehen würden. (1 P.)

(c) Wie gross müsste der kleinstmögliche Prozentsatz der jährlichen Gasreduktion sein, damit die Gasvorkommen niemals erschöpft werden? (1.5 P.)

Aufgabe 6: Stochastik (11.5 Punkte)

Eine Lehrerin führt mit ihrer Klasse ein Projekt zum Thema Machine Learning durch. Dazu wird die Klasse in zwei Gruppen eingeteilt. Jede Gruppe programmiert ein Algorithmus, der aus vorgegebenen Tierfotos (Inputbildern) möglichst zuverlässig identifizieren soll, ob es sich auf dem Inputfoto um eine Katze oder einen Hund handelt. Das heisst, für den Output des Algorithmus gibt es nur beiden Möglichkeiten: „KATZE“ oder „HUND“ (keine andere Outputantwort ist möglich). Um die Qualität der von den Schülergruppen programmierten Algorithmen prüfen zu können, weist die Lehrperson jeder Schülergruppe bei der Präsentation ihres fertigen Algorithmus eine Auswahl an Inputbildern zu.

Präsentation der Gruppe 1

Der Algorithmus von Schülergruppe 1 identifiziert 90% aller Katzen- und 80% aller Hundebilder korrekt. Für diese Gruppe hat die Lehrperson als Inputbilder 10 verschiedene Katzen- und 10 verschiedene Hundebilder ausgewählt.

(a) Auf wieviele verschiedene Arten können die 20 Inputbilder dem Algorithmus vorgelegt werden

   i. insgesamt? (0.5 P.)

   ii. wenn alle Katzenbilder hintereinander folgen sollen? (1 P.)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus alle 20 Bilder korrekt erkennt. (1 P.)

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 18 Bilder korrekt identifiziert werden.
Hinweis: Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor. (2.5 P.)

(d) Beim ersten Inputbild gibt der Algorithmus die Antwort „KATZE“ zurück. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich tatsächlich um eine Katze handelt? (2 P.)

Am Ende der Präsentation der Gruppe 1 bemerkt ein Schüler, dass die Lehrperson als Inputfotos auch Bilder von anderen Tieren oder sogar Menschen hätte wählen können. Die Lehrerin entschliesst sich, dies auszuprobieren, und bereitet eine neue Auswahl an Inputfotos vor. Diese enthält neben 17 Tierbildern auch 3 Bilder von verschiedenen Lehrpersonen des Klassenteams. Die 20 neuen Inputbilder werden dem Algorithmus in zufälliger Reihenfolge vorgelegt.

(e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das dritte Inputbild eine Lehrperson zeigt. (1 P.)

(f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten acht Bildern genau zwei Lehrpersonen erscheinen. (1 P.)

Präsentation der Gruppe 2

Der Algorithmus der Gruppe 2 erkennt zwar alle Katzeninputbilder korrekt, leider werden auch 40% der vorgelegten Hundebilder fälschlicher Weise als „KATZE“ identifiziert.

(g) Angenommen die Lehrerin würde für diese Schülergruppe genau 10 Katzen- und 10 Hundefotos als Inputbilder auswählen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus ein Erfolgsrate von 90% oder mehr erzielt? (1 P.)

(h) Die Lehrperson weist der Gruppe N Inputbilder zu. Wieviel Katzenfotos müssten sich darunter befinden, damit bei der Präsentation des Algorithmus von Gruppe 2 eine Erfolgsrate von mindestens 90% zu erwarten wäre? (1.5 P.)