Maturitätsprüfungen 2024 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4(A)W, 4Ba, 4Bb, 4IM, 4KSW, 4S, 4SZ
Lehrpersonen: HnR, HrP, SeM, StV, SuF, UgR

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-30X Pro
	Formelsammlung *Fundamentum Mathematik und Physik*, ohne Notizen

---

In denjenigen Teilaufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Teilaufgabe zu erhalten, müssen Sie in diesen Fällen auf das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen, auf das Berechnen vom Skalar- und vom Kreuzprodukt mit den entsprechenden Befehlen und auf die Befehle num-solv und poly-solv verzichten.
Die Teilaufgaben, die man in diesem Sinn **von Hand** lösen muss, werden mit dem Symbol ✍ gekennzeichnet.

Aufgabe 1: Vektorgeometrie (12.5 Punkte)

Gegeben sind die Gerade g mit der Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 19 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

und die zwei Punkte $A\,(\,6\,|\,9\,|\,-5\,)$ und $B\,(\,9\,|\,6\,|\,2\,)$.

(a) Prüfen Sie, ob der Punkt A auf den Geraden g liegt. (1 P.)

(b) Die Ebene E_1 verläuft senkrecht zur Geraden g und beinhaltet den Punkt B.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_1 auf. (2 P.)

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene E_1 und der Ebene $E_2 : 4x + 3y - 4 = 0$. (1.5 P.)

(d) Finden Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g, die von der Ebene E_2 einen Abstand $d = 3$ haben. (3 P.)

(e) Die Gerade g schneidet die yz-Ebene im Punkt C. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (2.5 P.)

✍ (f) Für welche Werte von a ist die unten definierte Gerade k_a orthogonal zu g? (2.5 P.)
Hinweis: Die Geraden g und k_a müssen sich nicht schneiden.

$$k_a \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Analysis (14 Punkte)

Die ganzrationale Funktion f ist gegeben mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$.

(a) (a$_1$) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. (1.5 P.)

(a$_2$) Zeigen Sie, dass die Funktion f genau einen Wendepunkt $W\left(6 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)$ besitzt. (2 P.)

(b) Die Funktion f hat genau zwei Extremalpunkte, nämlich $E_1\,(3\,|\,3)$ und $E_2\,(9\,|\,0)$.
Entscheiden Sie rechnerisch, ob diese Punkte Hoch- oder Tiefpunkte sind. (1 P.)

(c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im untenstehenden Koordinatensystem. (1 P.)

(d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und der Vertikalen mit der Gleichung $x = 6$ auf deren linken Seite eingeschlossen ist. (1.5 P.)

(e) Welche Geradengleichung hat die Wendetangente t durch W? (2 P.)

Sollten Sie die Wendetangente in der Teilaufgabe (e) nicht berechnen können, verwenden Sie in der folgenden Teilaufgabe (f) die Geradengleichung $t(x) = -\frac{3}{4}x + 6$.

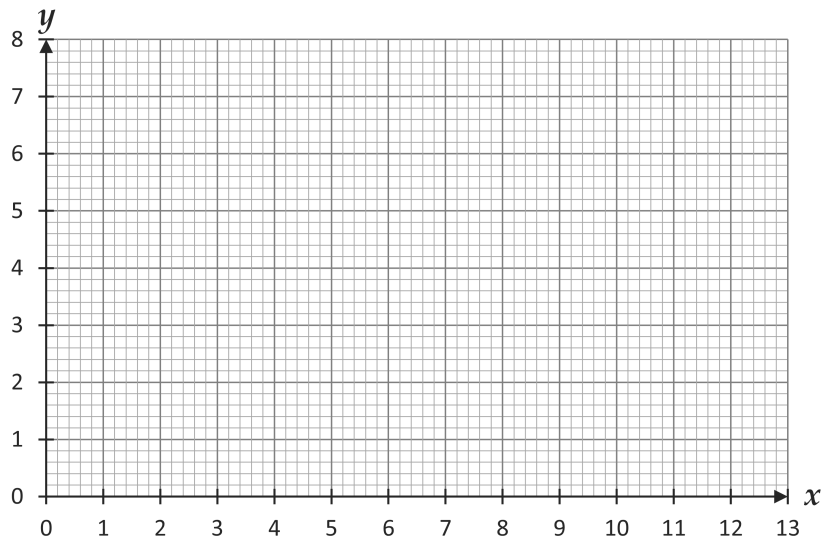
(f) Die y-Achse, die Wendetangente t und die Gerade, die durch den Wendepunkt W und den Ursprung verläuft, bilden ein Dreieck. Der Graph von f teilt diese Fläche in zwei Teile.
Berechnen Sie die Flächeninhalte beider Teile. (2.5 P.)

(g) Aus der Funktion f entsteht die neue Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = \frac{f(x)+1}{x^3}$.

(g$_1$) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten von h. (1.5 P.)

(g$_2$) Untersuchen Sie das Verhalten von h auf beiden Seiten des Pols. (1 P.)

Zu Aufgabe (c)



Aufgabe 3: Analysis (11 Punkte)

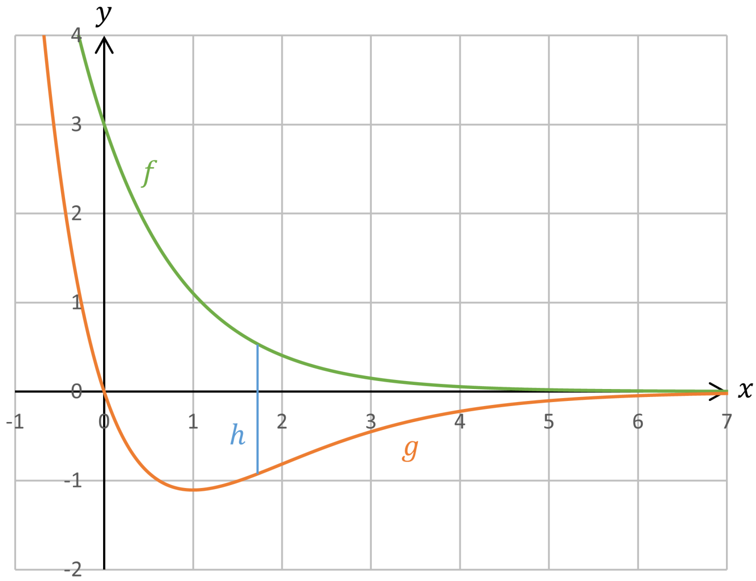
Gegeben sind die zwei Funktionen mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} \quad \text{und} \quad g(x) = -3x \cdot \mathrm{e}^{-x},$$

wobei e für die Eulersche Zahl steht.

Beide Funktionsgraphen sind im nebenstehenden Diagramm dargestellt.

Die blaue Strecke mit der Bezeichnung h bezieht sich auf die Aufgabe (d).



✍ (a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Graphen. Geben Sie die Koordinaten exakt an. (2 P.)

(b) Leiten Sie beide gegebenen Funktionen f und g ab und vereinfachen Sie, bis Sie $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-x}$ und $g'(x) = 3\mathrm{e}^{-x} \cdot (x-1)$ erhalten.

Dokumentieren Sie den Lösungsweg ausreichend. (2 P.)

(c) Unter welchem Winkel α schneiden sich die beiden Kurven im Schnittpunkt S? Runden Sie den Winkel auf 2 Dezimalstellen. (2 P.)

Hinweis: Falls Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S in Aufgabe (a) nicht berechnen konnten, rechnen Sie in dieser Aufgabe mit dem x-Wert -1.5 für den Schnittpunkt.

✍ (d) Bei welchem x-Wert für $x \geq -1$ (siehe Abbildung) ist die vertikale Strecke h zwischen beiden übereinander liegenden Punkten auf den Graphen maximal? Weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt. (3 P.)

(e) Der Graph der Funktion f wird um die x-Achse rotiert. Der entstehende Körper auf dem x-Intervall $[\,0\,;b\,]$ hat das Volumen 14.

Berechnen Sie die rechte Grenze b. Runden Sie auf 2 Dezimalstellen. (2 P.)

Aufgabe 4: Stochastik (11.5 Punkte)

Die Aufgabe besteht aus drei unabhängigen Teilaufgaben.

Aufgabe 4.1

In einem Kleiderschrank sind fünf Hosen, 3 blaue und 2 schwarze. Zusätzlich gibt es 7 T-Shirts, 2 weisse, 1 schwarzes und 4 farbige.

Aus dem Schrank wird eine Hose und ein T-Shirt zufällig gewählt.

(a) Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm zu diesem Vorgang und berechnen Sie sämtliche Pfadwahrscheinlichkeiten. (2 P.)

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kleidungsstücke schwarz sind? (0.5 P.)

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein weisses T-Shirt gewählt wird? (0.5 P.)

Aufgabe 4.2

Ein Zufallsgenerator erzeugt mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei zufällig generierte Zahlen alle gleich sind? (1 P.)

(b) Es werden 15 zufällig generierte Zahlen untersucht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese genau fünfmal die Zahl 9 enthalten? (1.5 P.)

(c) Nun werden immer zwei nacheinander generierte Zahlen untersucht. Es werden zufällig 20 solcher Zahlenpaare erzeugt und von den beiden Zahlen des Paares die Summe gebildet.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei von 20 Zahlenpaaren die Summe 4 haben? (1.5 P.)

Aufgabe 4.3

An einer Schule dürfen Schüler:innen aus 3 Unterrichtsbereichen 4 verschiedene Fächer wählen. Es gibt einen naturwissenschaftlichen Bereich A mit 3 Fächern, einen sprachlichen Bereich B mit 4 Fächern und einen dritten Bereich C mit 2 Fächern (Sport oder Theater).

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn es keine Einschränkungen gibt? (1 P.)

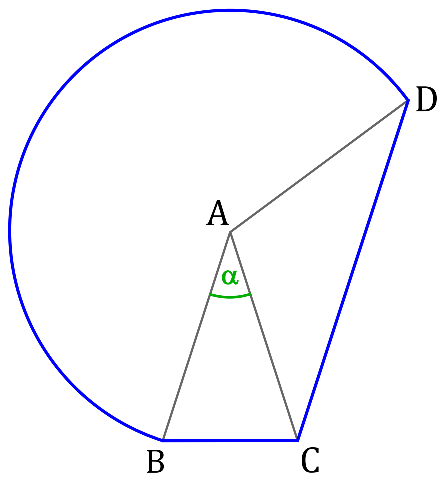
(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn aus jedem Bereich mindestens ein Fach gewählt werden muss? (1.5 P.)

(c) $84\,\%$ der Teilnehmer:innen des Theaterkurses sind Mädchen. $70\,\%$ aller Mädchen wählen Theater. Vom Rest der Schülerschaft wählen nur $20\,\%$ Theater. Wie viel Prozent der Schülerschaft sind Mädchen? (2 P.)

Aufgabe 5 (12 Punkte)

5.1 Trigonometrie

Ein Metallbauer schneidet ein Blechstück wie in der Figur aus. Die drei Punkte B, C und D liegen auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 5 cm.
Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind parallel.



(a) Berechnen Sie den Gesamtumfang des Metallstückes für $\alpha = 30°$. (3.5 P.)

✍(b) Es gibt jedoch eine Einschränkung. Der Winkel α muss die folgende Gleichung erfüllen:

$$10 \cdot \sin(2\alpha - 10°) = 7$$

Finden Sie alle möglichen Werte des Winkels α für $0 < \alpha < 90°$. (2.5 P.)

5.2 Solarkocher

Da sich der Sonnenstand im Laufe eines Tages verändert, variiert die Leistung eines Solarkochers.
Sei t die Zeit in Stunden, die seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr verstrichen ist.
Die Leistung P eines Solarkochers in Watt wird für $t \in [0\,;6]$, d.h. für die Zeit zwischen 6 Uhr und 12 Uhr, durch die folgende Funktion beschrieben:

$$P(t) = 600 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0.6t}\right)$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion P im Koordinatensystem auf der nächsten Seite. (1 P.)

✍(b) Ab welcher Uhrzeit überschreitet die Leistung des Solarkochers $450\,\mathrm{W}$? Geben Sie die Tageszeit auf Minuten genau an. (2 P.)

(c) Berechnen Sie die Gesamtenergie in Wh (Wattstunden), die der Kocher während des gesamten Vormittags (6:00-12:00) aufgenommen hat. Erinnert sei daran, dass die Leistung die Energie pro Zeiteinheit ist. (1.5 P.)

(d) Der Solarkocher ist eine sehr interessante ökologische Alternative trotz vieler Nachteile (das Kochen findet nur draussen statt, Wetterabhängigkeit usw.).

Nach welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl der Solarkocher auf der Welt, wenn die Anzahl jedes Jahr um $5\,\%$ zunimmt? (1.5 P.)

Beiblatt