Maturité 2024 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4IM, 4S (bilingues français)
Enseignant : ZuA

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-30X Pro
	Formulaire *Fundamentum Mathematik und Physik*, sans annotations
	Dictionnaire français-allemand

Les calculs des questions précédées du symbole ✍ doivent être faits **à la main**. Pour ces questions, seules les fonctionnalités élémentaires de la calculatrice sont autorisées. Pour obtenir la totalité des points dans ce cas, il faudra travailler **sans** utiliser les fonctions telles que *num-solv*, *poly-solv*, ainsi que le calcul numérique de dérivées ou d'intégrales.

Exercice 1 : Géométrie vectorielle (12,5 points)

On considère les deux points $A\,(\,6\,|\,9\,|\,-5\,)$ et $B\,(\,9\,|\,6\,|\,2\,)$ ainsi que la droite d qui a pour équation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 19 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que le point A est sur la droite d. (1 P.)

(b) Le plan Π_1 est perpendiculaire à la droite d et contient le point B. Déterminer une équation cartésienne du plan Π_1. (2 P.)

(c) Calculer l'angle formé par le plan Π_1 et le plan $\Pi_2 : 4x + 3y - 4 = 0$. (1,5 P.)

(d) Calculer les coordonnées des points de d qui sont distants de 3 unités de longueurs du plan Π_2. (3 P.)

(e) La droite d coupe le plan yz au point C. Calculer l'aire du triangle ABC. (2,5 P.)

✍ (f) Pour quelle valeur de a la droite k_a définie ci-dessous est-elle orthogonale à d ? (2,5 P.)
Indication : les droites d et k_a ne doivent pas nécessairement se couper.

$$k_a\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Analyse (14 points)

Soit f la fonction polynomiale donnée par l'expression $f(x) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$.

✍(a) (a_1) Calculer les zéros de la fonction f. (1,5 P.)

(a_2) Montrer que $I\left(6 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)$ est l'unique point d'inflexion du graphe de f. (2 P.)

✍(b) Le graphe de la fonction f a exactement deux points extremums : $E_1\,(3\,|\,3\,)$ et $E_2\,(9\,|\,0\,)$. Déterminer par le calcul si ces points sont des points maximums ou des points minimums. (1 P.)

(c) Représenter le graphe de la fonction f sur le système de coordonnées ci-dessous. (1 P.)

✍(d) Le graphe de f, l'axe x et la droite verticale d'équation $x = 6$ délimitent deux surfaces fermées. Calculer l'aire de la surface de gauche[1]. (1,5 P.)

(e) La droite t est la tangente au graphe de f en son point d'inflexion I. Déterminer l'équation de cette tangente t. (2 P.)

Si vous n'avez pas trouvé d'équation pour la question (e), vous pouvez utiliser pour la suite l'équation suivante : $t(x) = -\frac{3}{4}x + 6$.

(f) L'axe y, la tangente t et la droite qui passe par le point d'inflexion et l'origine[2] forment un triangle. Le graphe de f coupe ce triangle en deux parties. Calculer les aires de ces deux parties. (2,5 P.)

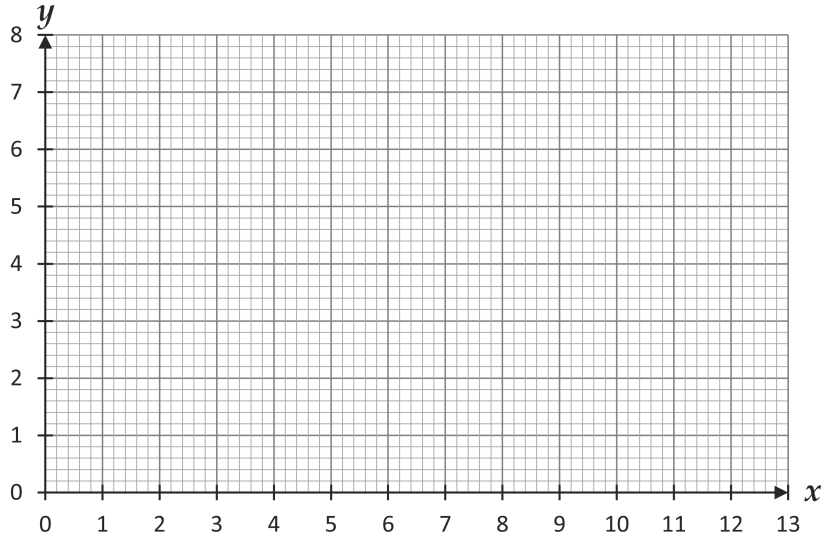
(g) On obtient une nouvelle fonction h à partir de la fonction f.

Elle a pour expression : $h(x) = \frac{f(x)+1}{x^3}$.

(g_1) Déterminer les équations de toutes les asymptotes au graphe de h. (1,5 P.)

(g_2) Déterminer le comportement de h de chaque côté[3] du pôle de la fonction h. (1 P.)

Pour la question (c)



1. *der linken Seite*
2. *Ursprung*
3. *auf beiden Seiten*

Exercice 3 : Analyse (11 points)

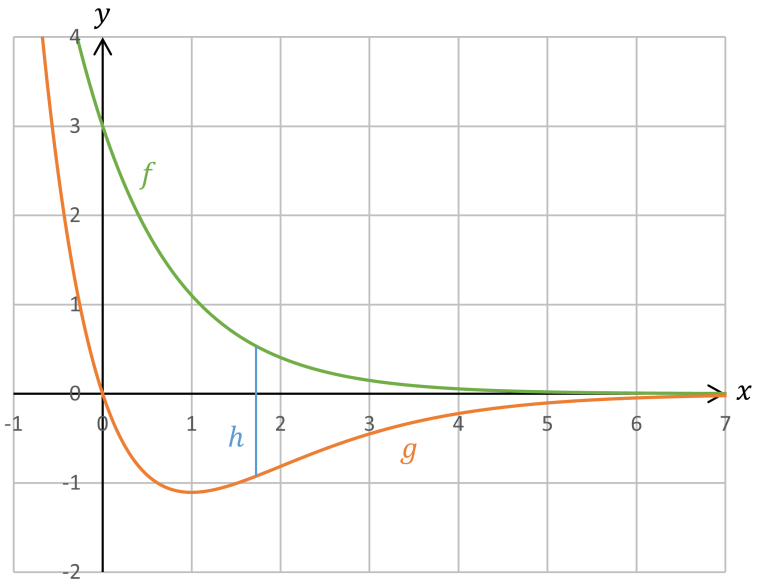
On considère les deux fonctions avec les expressions

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = -3x \cdot \mathrm{e}^{-x},$$

où e est le nombre d'Euler.

Les graphes de ces deux fonctions sont donnés ci-contre.

La distance bleue notée h concerne la question (d).



✍(a) Calculer les coordonnées du point d'intersection S des deux graphes. Donner les valeurs exactes. (2 P.)

(b) Dériver les expressions des fonctions f et g puis montrer après simplification que $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-x}$ et $g'(x) = 3\mathrm{e}^{-x} \cdot (x-1)$.
Détailler correctement les étapes de calcul. (2 P.)

(c) Calculer l'angle α formé par les deux graphes en S. Arrondir le résultat à la 2e décimale. (2 P.)
Indication : si vous n'avez pas pu calculer les coordonnées du point intersection S à la question (a), vous pouvez utiliser pour cette question la valeur $x = -1{,}5$ pour S.

✍(d) Pour quelle valeur de x, pour $x \geq -1$ (voir figure ci-dessus), la distance verticale h entre les deux graphes est-elle maximale ? Montrer qu'il s'agit bien d'un maximum. (3 P.)

(e) La révolution (rotation) du graphe de f autour de l'axe x, pour $x \in [0\,;b]$, engendre un volume. Pour quelle valeur de b ce volume est-il égal à 14 unités ? Arrondir le résultat à la 2e décimale. (2 P.)

Exercice 4 : Combinatoire et probabilité (11,5 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 4.1

Dans une armoire[4], il y a cinq pantalons : 3 bleus et 2 noirs. Il y a également sept t-shirts : 2 blancs, 1 noir et 4 colorés.

Un pantalon et un t-shirt sont choisis au hasard dans l'armoire.

(a) Construire un diagramme en arbre complet qui montre toutes les probabilités (les probabilités finales et les probabilités sur chaque branche). (2 P.)

(b) Quelle est la probabilité que les deux vêtements soient noirs ? (0,5 P.)

(c) Quelle est la probabilité qu'aucun t-shirt blanc ne soit choisi ? (0,5 P.)

Exercice 4.2

Un générateur aléatoire[5] produit avec la même probabilité les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

(a) Avec quelle probabilité trois chiffres générés au hasard sont-ils tous égaux ? (1 P.)

(b) Une série de 15 chiffres générés au hasard est examinée. Quelle est la probabilité que cette série contienne exactement cinq fois le chiffre 9 ? (1,5 P.)

(c) On examine maintenant toujours deux chiffres générés l'un après l'autre. On génère au hasard 20 paires de ces chiffres et on fait la somme des deux chiffres pour chacune des 20 paires.
Quelle est la probabilité qu'au plus[6] deux paires sur les 20 paires générés aient pour somme 4 ? (1,5 P.)

Exercice 4.3

Dans une école, les élèves doivent choisir 4 matières[7] différentes dans 3 domaines d'enseignement. Il y a le domaine des sciences noté A avec 3 matières, le domaine des langues noté B avec 4 matières et un troisième domaine noté C avec deux matières : sport ou théâtre.

(a) Combien y a-t-il de possibilités s'il n'y a aucune restriction ? (1 P.)

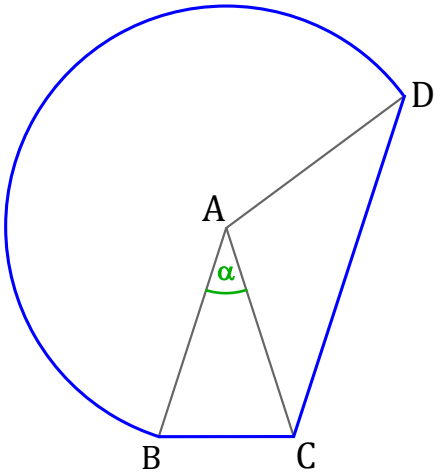
(b) Combien y a-t-il de possibilités, s'il faut choisir au moins une matière par domaine ? (1,5 P.)

(c) $84\,\%$ des élèves qui ont choisi le théâtre sont des filles. $70\,\%$ de toutes les filles ont choisi le théâtre. Seuls $20\,\%$ des autres élèves ont choisi le théâtre.
Quel est le pourcentage de filles dans cette école ? (2 P.)

4. *Kleiderschrank*
5. *Zufallsgenerator*
6. *höchstens*
7. *Fächer*

Exercice 5 (12 points)

5.1 Trigonométrie



Un métallurgiste[8] découpe une pièce en métal comme sur la figure ci-contre. Les trois points B, C et D se trouvent sur le cercle de centre A et de rayon[9] $r = 5\,\mathrm{cm}$.
Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont parallèles.

(a) Calculer le périmètre total[10] de la pièce en métal pour $\alpha = 30°$. (3,5 P.)

✍(b) Il y a cependant une contrainte. L'angle α doit vérifier l'équation suivante :

$$10 \cdot \sin(2\alpha - 10°) = 7$$

Trouver toutes les valeurs possibles de l'angle α pour $0 < \alpha < 90°$. (2,5 P.)

5.2 Four solaire

Comme la position du soleil n'est pas fixe, la puissance[11] d'un four solaire[12] varie au cours de la journée.
On définit la variable t comme le temps en heures qui s'est écoulé depuis le lever du soleil, à 6 heures.
La puissance P en watts d'un four solaire est ainsi modélisée pour $t \in [0\,;6]$, c'est-à-dire pour les heures comprises entre 6 h et 12 h, par la fonction suivante :

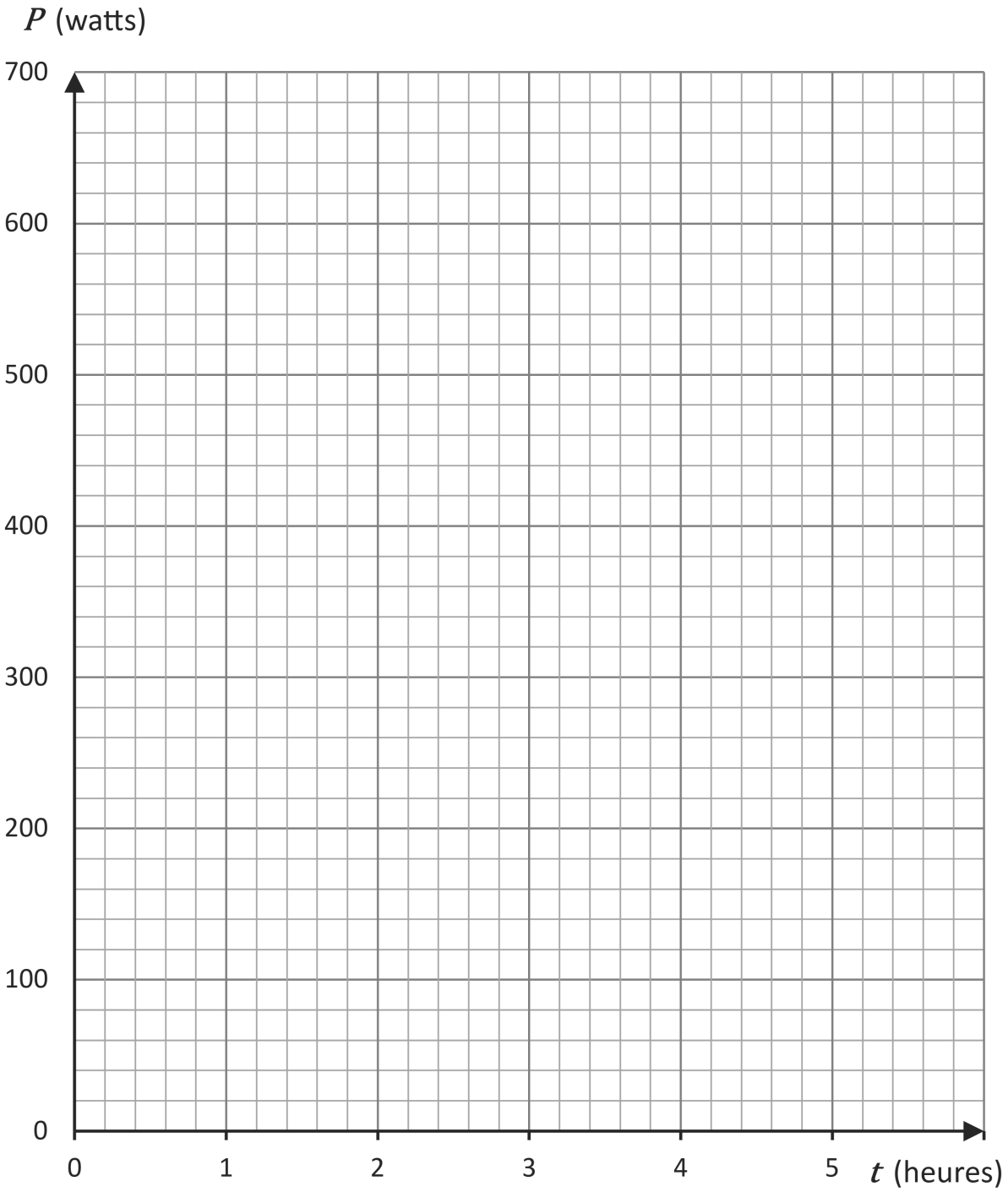
$$P(t) = 600 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}6t}\right)$$

(a) Représenter le graphe de la fonction P sur le système de coordonnées de la page suivante. (1 P.)

✍(b) À partir de quelle heure la puissance du four dépasse-t-elle $450\,\mathrm{W}$? Donner l'heure de la journée à la minute près. (2 P.)

(c) Calculer l'énergie totale en Wh (wattheures) récupérée par le four pour toute la matinée (6h-12h). On rappelle que la puissance est l'énergie par unité de temps. (1,5 P.)

(d) Le four solaire est une alternative écologique très intéressante, malgré de nombreux inconvénients (la cuisson est extérieure, dépend de la météo etc.).
Après combien de temps le nombre de fours solaires dans le monde aura-t-il doublé, si leur nombre augmente de $5\,\%$ chaque année ? (1,5 P.)

8. *Metallbauer*
9. *Radius*
10. *Gesamtumfang*
11. *Leistung*
12. *Solarkocher*

Système de coordonnées relatif à l'exercice 5.2