

Maturitätsprüfungen 2024 – Mathematik schriftlich

Klasse: 4A(W), 4Ae (Profil A)

Lehrpersonen: KrD, PrG

Die Prüfung sieht insgesamt 60 Punkte vor. Die Aufgaben 1–6, die auf farbigen Blättern gedruckt sind, müssen ganz ohne Taschenrechner gelöst werden. Diese Aufgaben umfassen 48.5 Punkte, d.h. ca. 80% der Gesamtpunktzahl.

Erst nach Abgabe der Lösungen zu den Aufgaben 1–6 (inkl. der zugehörigen farbigen Aufgabenblätter) dürfen Sie Ihren Taschenrechner nehmen und für die 7. Aufgabe (Stochastik) einsetzen.

Bemerkungen: Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.

Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!

Hilfsmittel: Gesamte Prüfung: Formelsammlung *Formeln, Tabellen, Begriffe* vom Orell Füssli Verlag, ohne Notizen

Aufgaben 1-6: ohne Taschenrechner

Aufgabe 7: Taschenrechner (4A(W): TI-nspire CAS im Press-to-Test-Modus, 4Ae: TI-30X Pro MathPrint) erlaubt

Viel Erfolg wünschen Ihnen Dennis Krüger und Gérald Prétôt.

Aufgabe 1: Vektorgeometrie (11 Punkte)

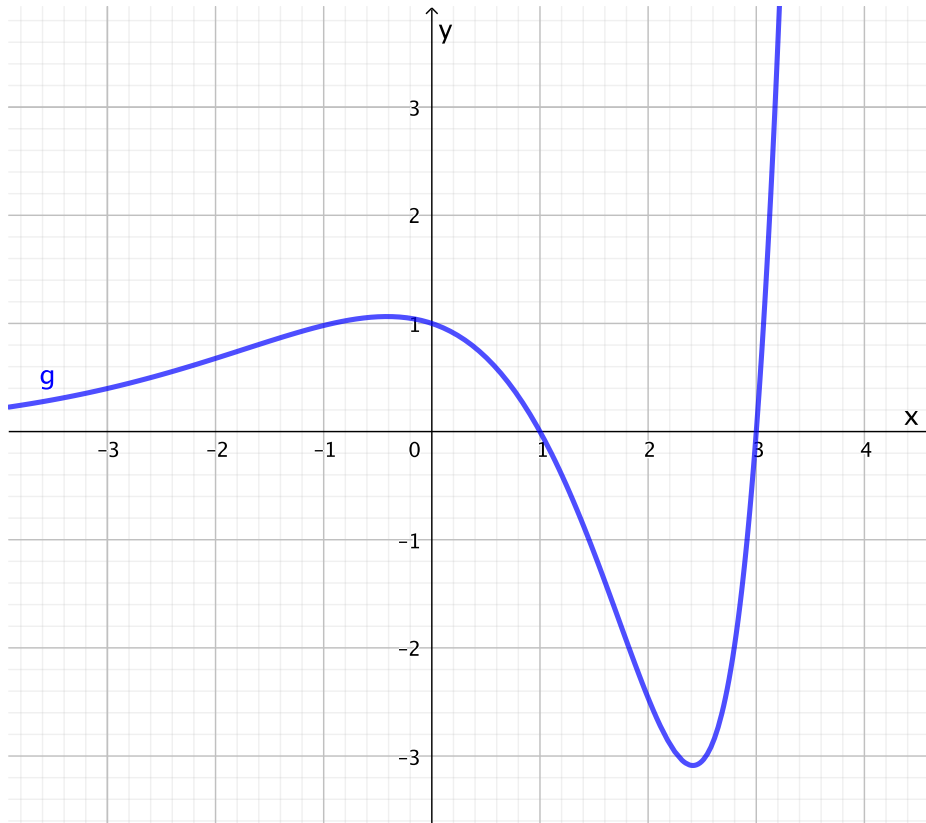
Hinweise: Die folgenden Teilaufgaben können jeweils auf vielen verschiedenen Wegen gelöst werden. Wählen Sie deshalb bewusst ein möglichst effektives/kurzes Lösungsverfahren. Zur Lösung der Teilaufgaben dürfen Sie sowohl Kenntnisse der Vektorgeometrie als auch bekannte Methoden der Trigonometrie einsetzen.

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ spannen vom Koordinatenursprung O aus einen Spat auf.

- Begründen Sie rechnerisch, dass der aus den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} gebildete Spat sogar einen Quader darstellt, d.h. dass alle Kanten des Spats senkrecht aufeinander stehen, und bestimmen Sie anschliessend das Volumen dieses Quaders. (2 P.)
- Überprüfen Sie rechnerisch, ob die folgende Behauptung wahr ist:
Die Gerade h , welche durch den vom Ursprung O am weitesten entfernten Eckpunkt Q verläuft und die z -Achse des Koordinatensystems an der Stelle 4 schneidet, schliesst mit der Raumdiagonalen \overline{OQ} des Quaders einen Winkel von $\alpha = 60^\circ$ ein. (2.5 P.)
- Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Radius der Kugel K_1 mit der Gleichung $K_1: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y - 3z = 0$ und prüfen Sie, ob K_1 durch alle Ecken des Quaders verläuft. (2 P.)
- Betrachten Sie im Folgenden diejenige Kugel K_2 mit Radius $r = 2.5$, deren Mittelpunkt sich im Mittelpunkt M des Quaders befindet.
 - Welchen Abstand weist die Ebene $E: 3x + 2y - 6z = 43$ zur Kugel K_2 auf? (2 P.)
 - Die Kugel K_2 schneidet alle Seitenflächen des Quaders. Bestimmen Sie den Radius des grösst möglichen Schnittkreises von K_2 mit einer Seitenfläche des Quaders. (2.5 P.)

Aufgabe 2: Analysis (8 Punkte)

Der abgebildete Ausschnitt des Graphen einer Funktion g genügt der Struktur $g(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ und schneidet die Koordinatenachsen an ganzzahligen Werten. Dabei stellen a, b und c reelle Parameter und e die Euler'sche Zahl dar.



- (a) Berechnen Sie unter diesen Voraussetzungen die Werte der (reellen) Parameter a, b und c , bzw. bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion g . (3 P.)
- (b) Man sieht in der Abbildung nur einen Ausschnitt des Graphen von g . Erörtern Sie, ob der Graph die x -Achse an weiteren Stellen ausserhalb des abgebildeten Bereichs schneidet. (0.5 P.)

Hinweis: Falls Sie die Funktionsgleichung nicht ermitteln können, rechnen Sie für alle folgenden Teilaufgaben mit der Ersatzlösung: $g(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\right) \cdot e^x$ weiter.

- (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des vom Graphen von g und der x -Achse begrenzten, unterhalb der x -Achse gelegenen Flächenstücks, ohne die Formelsammlung gebrauchen zu dürfen. (3 P.)

Hinweis: Falls Sie keine Stammfunktion von g ermitteln können, rechnen Sie mit der Stammfunktion $G(x) = e^x \cdot \left(\frac{x^2}{3} + 3 - 2x\right)$ weiter.

- (d) Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage wahr ist:

Der Flächeninhalt des nach links unbegrenzten Flächenstücks zwischen dem Graphen von g und der x -Achse über dem Intervall $I = (-\infty; 1]$ ist grösser als der Inhalt der Fläche der vorigen Teilaufgabe. (1.5 P.)

Aufgabe 3: Analysis (7 Punkte)

Diskutieren Sie im Folgenden die reelle rationale Funktion f mit

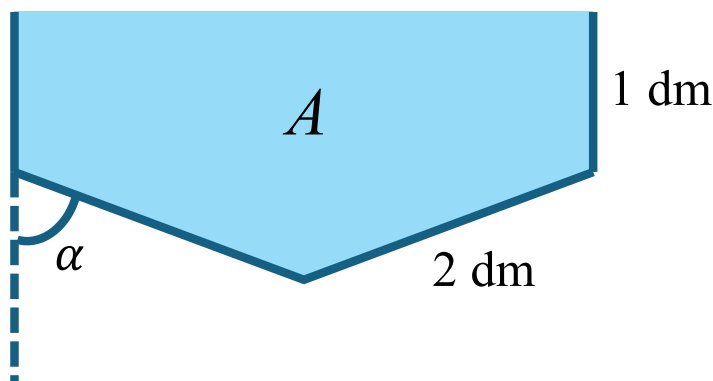
$$f(x) = \frac{x^6 - 16x^2}{2x^2 - 4x}$$

- (a) Analysieren Sie, ob der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist oder achsensymmetrisch zur y -Achse verläuft. (1 P.)
- (b) An welchen Stellen weist der Graph von f Lücken auf? (1 P.)
- (c) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f . (1.5 P.)
- (d) Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote $A(x)$ des Graphen von f . (2 P.)
- (e) Begründen Sie, dass der Graph von f keine Polstellen aufweist. (0.5 P.)
- (f) Analysieren Sie mit Hilfe der beiden vorangegangenen Teilaufgaben und **ohne zu rechnen**, d.h. nur in Worten, ob der Graph von f drei Wendepunkte aufweist. (1 P.)

Aufgabe 4: Optimierung, Trigonometrie (6 Punkte)

Der Hobbybastler Peter hat ein sechs Dezimeter breites und zwölf Meter langes Blech zur Verfügung, welches er zu einer symmetrischen Wasserabflussrinne formen möchte (vgl. Abbildung der Querschnittfläche A der Abflussrinne unten.)

Aufgrund von baulichen Vorschriften der Gemeinde müssen die beiden Seitenflächen der Rinne senkrecht zum Boden verlaufen und exakt 1 Dezimeter hoch sein. Variiert werden darf nur der Winkel α der Rinne.



- (a) Drücken Sie die Querschnittfläche A als Funktion des Winkels α aus, d.h. bestimmen Sie $A(\alpha)$.
Hinweis: Die obige Skizze darf gegebenenfalls ergänzt werden. (2 P.)
- (b) Es gibt einen Winkel α zwischen null und neunzig Grad, für welchen die Regenrinne am meisten Wasser aufnehmen kann. Berechnen Sie die exakte Grösse dieses Winkels α . (4 P.)
Hinweis: Sollten Sie die Teilaufgabe (a) nicht gelöst haben, rechnen Sie mit der (falschen) Flächenfunktion $A(\alpha) = 3 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + 3 \cdot \sin(\alpha)$ weiter.

Aufgabe 5: Folgen und Reihen (6.5 Punkte)

Gegeben sei die Folge (a_n) mit dem allgemeinen Glied

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \quad (\text{wobei } n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) keine negativen Folgenglieder besitzt und begründen Sie anschliessend, dass die Folge (a_n) streng monoton fällt. (3 P.)
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge. (0.5 P.)

Betrachten wir die zur Folge (a_n) zugehörige Reihe (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

- (c) Berechnen Sie $s_3 = \sum_{k=1}^3 a_k$. (1 P.)
- (d) Beweisen Sie dies mittels vollständiger Induktion die Formel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (2 \text{ P.})$$

Hinweis: Stellen Sie sicher, dass alle formalen Schritte einer vollständigen Induktion dokumentiert sind.

Aufgabe 6: Kegelschnitte/Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Wir betrachten eine Teilmenge ε der Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} , für die gilt:

$$\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{-(\operatorname{Re}(z))^2}{\operatorname{Im}(z) - \frac{3}{4}} = 4 \cdot \operatorname{Im}(z) + 3 \right\},$$

wobei $\operatorname{Re}(z)$ den Realteil und $\operatorname{Im}(z)$ den Imaginärteil der komplexen Zahlen z bezeichnen.

- (a) Zeigen Sie, dass ε eine Ellipse in der komplexen Zahlenebene darstellt und geben Sie die Koordinatengleichung von ε an. (2 P.)

Hinweis: Konnten Sie keine Koordinatengleichung für ε ermitteln, arbeiten Sie mit $\varepsilon: 1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$ weiter.

- (b) Bestimmen Sie die komplexen Zahlen $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{C}$, welche als Scheitelpunkte der Ellipse ε interpretiert werden können. (0.5 P.)
- (c) Bestimmen Sie die komplexen Zahlen $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$, welche als Brennpunkte der Ellipse ε aufgefasst werden können. (1 P.)
- (d) Berechnen Sie alle Schnittpunkte der Ellipse ε mit dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene und geben Sie die entsprechenden komplexen Zahlen sowohl in Summen- als auch in Polardarstellung an. (3 P.)

Unabhängig von den obigen Teilaufgaben:

- (e) Berechnen Sie alle Fixpunkte der komplexen Funktion $f(z) = z^2 + z - (5 + 12i)$ in Summendarstellung. (3.5 P.)

Hinweis: Erst nach Abgabe der Lösungen zu den Aufgaben 1–6 (inkl. der zugehörigen farbigen Aufgabenblätter) dürfen Sie Ihren Taschenrechner nehmen und für die 7. Aufgabe (Stochastik) einsetzen.

Aufgabe 7: Stochastik (11.5 Punkte)

Zum Würfeln benutzen wir faire Tetraeder, deren Seiten mit 1-4 durchnummeriert sind. Als gewürfelt gilt diejenige Zahl, auf welcher ein Tetraeder zu liegen kommt.

In einem *Wurf* würfeln wir gleichzeitig mit drei nicht-unterscheidbaren Tetraedern und notieren die gewürfelten Zahlen.

Wir sprechen von einem *Paar*, wenn in einem *Wurf* genau zwei gleiche Zahlen gewürfelt werden, also zwei gleiche und eine, welche sich von diesen beiden unterscheidet.

- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in **einem** *Wurf*
- a1. dreimal die 4 erscheint? (0.5 P.)
 - a2. genau eine 1, eine 2 und eine 3 vorkommen? (1 P.)
 - a3. drei unterschiedliche Zahlen erscheinen? (0.5 P.)
 - a4. *ein Paar* gewürfelt wird - zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{16}$ beträgt. (1 P.)
- (b) Wir führen nun **zehn** *Würfe* der drei Tetraeder hintereinander durch. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in diesen zehn *Würfen*
- b1. kein einziges *Paar*, (0.5 P.)
 - b2. genau drei *Paare*, (1 P.)
 - b3. mindestens zweimal *ein Paar* zu würfeln? (1 P.)
 - b4. Wie gross ist der Erwartungswert der Anzahl der gewürfelten *Paare*? (1 P.)
- (c) Wenn wir **beliebig viele** *Würfe* der drei Tetraeder ausführen,
- c1. wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, im 12. *Wurf* erstmals ein *Paar* zu werfen? (1 P.)
 - c2. wie viele *Würfe* sind im Minimum nötig, um mit einer Sicherheit von 99.9% oder höher wenigstens einmal *ein Paar* zu würfeln? (1.5 P.)
- (d) Wir benutzen nun **zwei** von aussen nicht zu unterscheidende Tetraeder, wobei einer der beiden Würfeln so präpariert ist, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 4 doppelt so gross ist, wie diejenige für jede andere Zahl. Wir würfeln **einmal** mit den beiden Tetraedern:
- d1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass **genau eine** 4 erscheint? (1.5 P.)
 - d2. Wenn genau eine 4 gewürfelt wird, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese vom **präparierten** Tetraeder stammt? (1 P.)