

Maturitätsprüfungen 2025 - Mathematik schriftlich

Klassen: 4Ba, 4Bb, 4Be, 4GLW, 4IM, 4KSW, 4SI, 4W, 4We, 4WZ

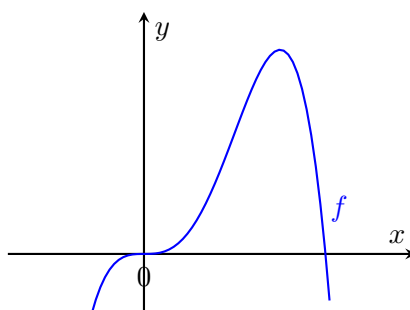
Lehrpersonen: BtT, FrC, HuR, KiA, KrD, MoM, PeM, PrG, RoL, SuF

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-30X Pro MathPrint Formelsammlung <i>Fundamentum Mathematik und Physik</i> , ohne Notizen

Bei allen Aufgaben ist der Lösungsweg zu dokumentieren. In denjenigen Teilaufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Teilaufgabe zu erhalten, müssen Sie in diesen Fällen auf das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen, auf das Berechnen vom Skalar- und vom Kreuzprodukt mit den entsprechenden Befehlen und auf die Befehle *num-solv*, *poly-solv* und *sys-solv* verzichten. Die Teilaufgaben, die man in diesem Sinn **von Hand** lösen muss, werden mit dem Symbol  gekennzeichnet.

Aufgabe 1: Analysis (12 Punkte)

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$. Im Folgenden ist ein Ausschnitt des Graphen von f abgebildet.



-  Berechnen Sie die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von f . Handelt es sich um Hoch- oder Tiefpunkte? Begründen Sie. (3.5 P.)
-  Der Punkt $W(2|4)$ liegt auf dem Graphen von f . Zeigen Sie, dass es sich um einen Wendepunkt handelt. (1 P.)
- Die Tangente sowie die Normale am Punkt W bilden mit der y -Achse ein Dreieck. Wie gross ist sein Flächeninhalt? (3 P.)

Zusätzlich betrachten wir nun die Funktion $g(x) = x^3 - 2x$.

-  Die Graphen von f und g schliessen die Fläche F_1 ein. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt A_1 . (3 P.)
- Sei $0 \leq p \leq 4$ eine reelle Zahl. Der Graph von f schliesst mit der x -Achse im Intervall $[0; p]$ eine Fläche F_2 ein, deren Flächeninhalt $A_2 = 10$ ist. Berechnen Sie p . (1.5 P.)

Aufgabe 2: Vektorgeometrie (13 Punkte)

Gegeben ist ein Dreieck mit den Ecken $A(5|8|3)$, $B(11|0|3)$ und $C(x_C|y_C|z_C)$. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind die Punkte $X(8|4|3)$, $Y(5|-2|3)$ und $Z(2|2|3)$ (siehe Abbildung 1).

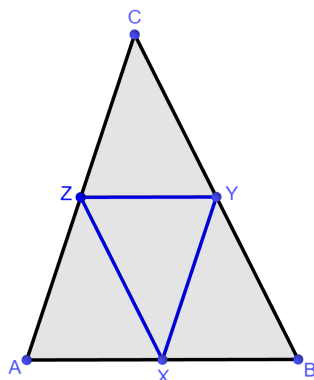


Abbildung 1

- Zeigen Sie rechnerisch, dass mit den oben angegebenen Punkten die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{ZY}$ parallel zueinander sind. (1 P.)
- Berechnen Sie die Koordinaten der Ecke C . (1 P.)
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ . (1.5 P.)

Das Dreieck ABC wird nun entlang der Seitenlinien des eingeschriebenen Dreiecks XYZ so gefaltet, dass die Ecken A , B und C zusammenfallen und die Spitze S einer Pyramide mit der Grundfläche XYZ bilden (siehe Abbildung 2).

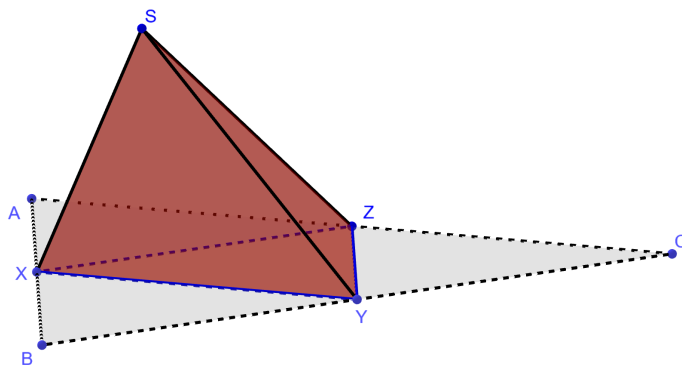


Abbildung 2

- Während des Faltens bewegt sich der Punkt A zur Spitze S . Dabei befindet sich A stets in einer Ebene E_A , die orthogonal zur Kante $\overline{XZ}$ der Pyramide ist. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung eine Koordinatengleichung für E_A darstellt:

$$E_A : 3x + y - 23 = 0$$

(1 P.)

- Während des Faltens bewegt sich der Punkt B zur Spitze S . Dabei befindet sich B stets in einer Ebene E_B . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_B . (1.5 P.)

Fortsetzung der Aufgabe auf Seite 3!

Fortsetzung von Aufgabe 2

- (f) Die beiden Ebenen E_A und E_B bilden eine Schnittgerade g_s , auf der die Spitze S liegt. Bestimmen Sie eine Parametergleichung dieser Geraden g_s . (2 P.)

Hinweis: Wenn Sie in Teilaufgabe (e) keine Gleichung für E_B finden konnten, rechnen Sie mit der Ersatzlösung $3x - 4y - 13 = 0$ weiter.

Ein Student baut ein Modell der Pyramide und misst die Koordinaten der Spitze S auf eine Dezimalstelle genau. Er erhält folgendes Resultat:

$$S(7.0|2.0|7.5)$$

Rechnen Sie nun mit diesen gerundeten Koordinaten für S weiter.

- (g) Berechnen Sie den spitzen Winkel, den die Grundfläche XYZ der Pyramide mit ihrer Seitenfläche XZS einschliesst, und runden Sie ebenfalls auf eine Dezimalstelle. (2.5 P.)
- (h) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $XYZS$. (1.5 P.)
- (i) In welchem Verhältnis steht das Volumen der Pyramide $XYZS$ zu dem Volumen der Pyramide $ABCS$? Begründen Sie Ihre Antwort ohne eine Rechnung. (1 P.)

Aufgabe 3: Kombinatorik und Stochastik (10 Punkte)

Eine Lehrkraft lässt in ihren drei Deutschklassen einen einseitigen Aufsatz als Hausarbeit schreiben. Die Klassengrössen sind dabei wie folgt verteilt:

Klasse	4A	4W	4Z
Anzahl Schüler:innen	23	18	14

Zuhause bemerkt die Lehrkraft, dass alle Aufsätze komplett durcheinandergeraten sind. Dabei sind auch über die Klassen hinweg die Aufsätze vertauscht, verrutscht und vermischt worden. Ob da vielleicht absichtlich jemand einen Streich gespielt hat?

- (a) Auf wie viele Arten können die Aufsätze vermischt worden sein? (0.5 P.)

Ohne sich die Mühe zu machen, die Aufsätze zu sortieren, nimmt die Lehrkraft achselzuckend einen beliebigen Aufsatz vom unsortierten Stapel und beginnt mit der Korrektur.

- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit korrigiert die Lehrkraft als erstes einen Aufsatz, der nicht aus der 4W stammt? (1 P.)
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die ersten drei Aufsätze aus allen drei unterschiedlichen Klassen? (1.5 P.)

In Zeiten von Künstlicher Intelligenz (KI) ist es ein Leichtes, Aufsätze per Knopfdruck von einem Chatbot erstellen zu lassen. Erste Erhebungen zeigen, dass 11% der Schüler:innen ihre Hausarbeiten nicht mehr selbst erledigen, sondern von einer KI generieren lassen. Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass für unsere Grundgesamtheit ebenfalls eine elfprozentige Wahrscheinlichkeit besteht, dass ein Text KI-generiert wurde.

- (d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf beliebig ausgewählten Texten alle KI-generiert sind? (0.5 P.)
- (e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von fünf Texten genau drei KI-generiert? (1.5 P.)
- (f)  Ab wie vielen Texten kann man mit über 99%-iger Sicherheit davon ausgehen, dass mindestens ein KI-generierter Text dabei ist? (2.5 P.)
- (g) Ein KI-Erkennungsdienst wirbt damit, KI-generierte Texte zu entlarven. Das Unternehmen gibt an, Texte mit 90%-iger Sicherheit korrekt als "generiert" bzw. "nicht generiert" einzuordnen.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Text selbst verfasst wurde, wenn der Erkennungsdienst ihn als "generiert" markiert hat? (2.5 P.)

Aufgabe 4: Beurteilende Statistik (6.5 Punkte)

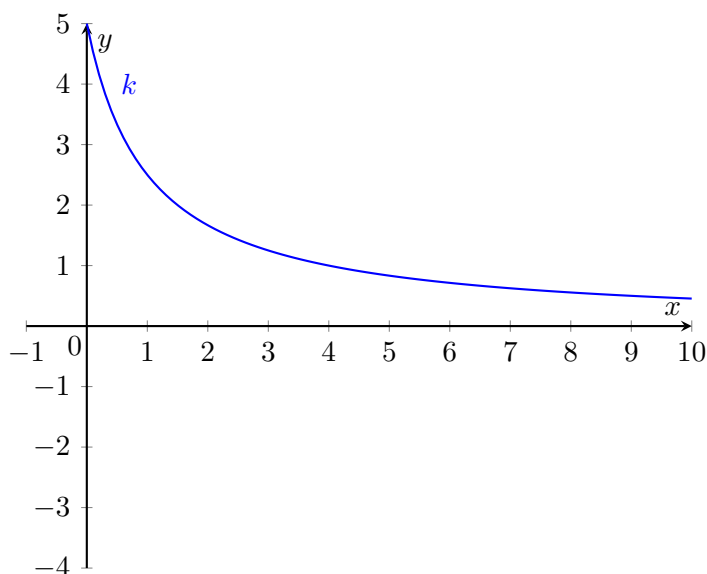
Noch immer sterben jährlich viele Kinder an Malaria. Gerade Erstinfektionen verlaufen bei Kindern oft tödlich, da sie noch keine Immunität gegen die Parasiten erworben haben. In mehreren afrikanischen Ländern werden klinische Studien durchgeführt, um die Wirksamkeit eines neuen Impfstoffs gegen Malaria zu testen. Man weiss, dass ohne Impfung etwa 40% der Kinder in diesen Ländern innerhalb eines Jahres an Malaria erkranken.

Für die Studie wurde eine Gruppe von 310 Kindern mit dem neuen Malaria-Impfstoff geimpft und ein Jahr lang beobachtet, wie viele davon an Malaria erkranken.

- (a) Wie viele Malariainfektionen wären in dieser Gruppe zu erwarten, wenn die Impfung keine Wirkung zeigt? (0.5 P.)
- (b) Der Hersteller behauptet, dass der Impfstoff den Anteil der Kinder, die an Malaria erkranken, deutlich senken kann. Es wird festgelegt, dass man davon ausgeht, dass der Impfstoff wirksam ist, wenn weniger als 115 geimpfte Kinder an Malaria erkranken.
 - i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Impfstoff fälschlicherweise als wirksam angesehen wird (Fehler 1. Art)? (1.5 P.)
 - ii. Wie gross wäre die Wahrscheinlichkeit, dass der Impfstoff fälschlicherweise als nicht wirksam angesehen wird, wenn der Hersteller angibt, dass durch seine Impfung nur noch 30% der Kinder an Malaria erkranken (Fehler 2. Art)? (2.5 P.)
- (c) Bei der Auswertung der Studie zeigt sich, dass 110 geimpfte Kinder an Malaria erkrankt sind. Kann man bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ auf eine Wirksamkeit des Impfstoffs schliessen? Begründen Sie! (2 P.)

Aufgabe 5: Optimierung (8 Punkte)

Betrachtet wird der in der folgenden Abbildung gegebene Graph der Funktion $k(x) = \frac{5}{x+1}$.



Sei $u > 1$. Man definiert das rechtwinklige Dreieck PQR , wobei $P(u|k(u))$ ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von k ist, sowie $Q(1|0)$ und $R(u|0)$.

Dieses Dreieck rotiert um die x -Achse und erzeugt so einen geraden Kreiskegel.

(a) Skizzieren Sie für $u = 4$ einen solchen Kreiskegel im obigen Koordinatensystem. (0.5 P.)

(b)  Zeigen Sie, dass das Kegelvolumen V in Abhängigkeit von u mithilfe der folgenden Funktion bestimmt werden kann: (2.5 P.)

$$V(u) = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{u-1}{u^2+2u+1}$$

(c)  Berechnen Sie u so, dass das Kegelvolumen maximal wird. Wie gross ist dieses maximale Kegelvolumen? Geben Sie den exakten Wert an. (5 P.)

Hinweis: Es wird angenommen, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt. Es wird kein Nachweis dafür verlangt.

Aufgabe 6: Exponentieller Zerfall (7.5 Punkte)

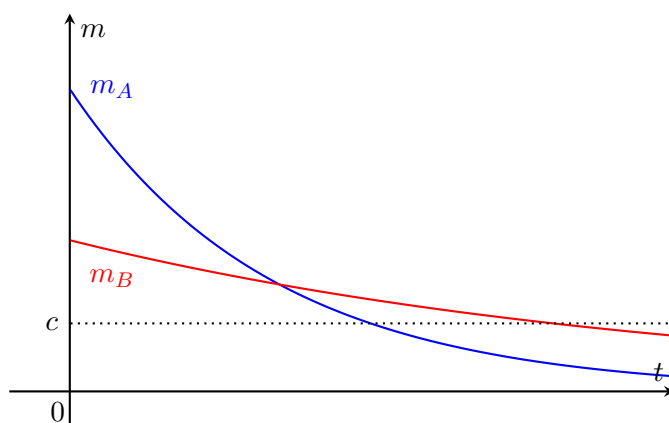
In einem Labor wird der Zerfall zweier radioaktiver Stoffe A und B beobachtet. m steht für die jeweils vorhandene Masse der Stoffe (in Gramm) und t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit (in Stunden).

Der radioaktive Zerfall der beiden Stoffe wird durch die folgenden Exponentialfunktionen beschrieben:

$$m_A(t) = 400 \cdot e^{\frac{-3t}{10}} \quad \text{und} \quad m_B(t) = 200 \cdot e^{\frac{-t}{10}}$$

Hierbei bezeichnet e die Euler'sche Zahl.

Die folgende (nicht massstabsgetreue) Abbildung zeigt die Graphen der beiden Funktionen.

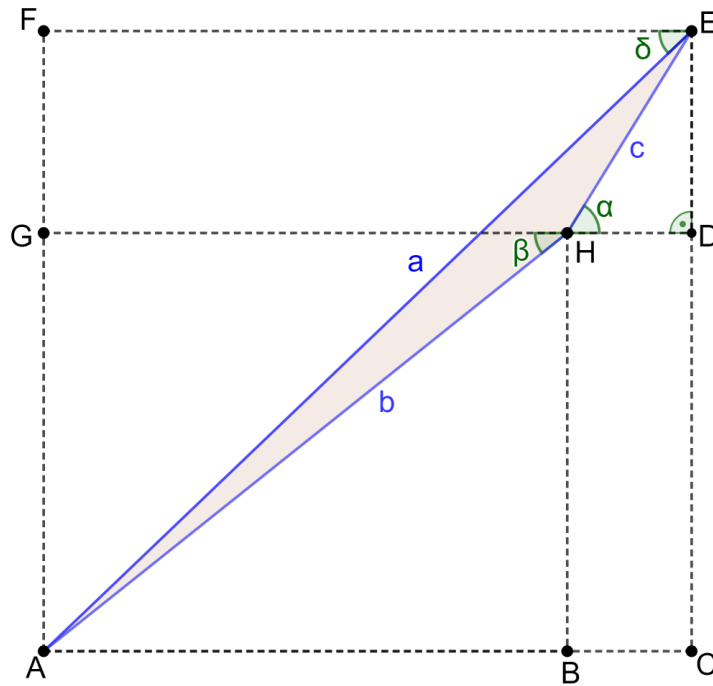


- (a) Zeigen Sie, dass zu Beobachtungsbeginn die Masse des radioaktiven Stoffs B genau die Hälfte der Masse des radioaktiven Stoffs A ist. (0.5 P.)
- (b)  Wie lange dauert es, bis bei Stoff A die Hälfte der Masse zerfallen ist? (1.5 P.)
- (c)  Wie viele Stunden nach Beobachtungsbeginn ist von beiden radioaktiven Stoffen die gleiche Masse vorhanden? Wie gross ist diese Masse? (2 P.)
- (d)  Berechnen Sie für Stoff A den Zeitpunkt, zu dem die Zerfallsrate $40 \frac{\text{Gramm}}{\text{Stunde}}$ beträgt. (1.5 P.)
- (e) Die Beobachtung wird beendet, wenn eine kritische Masse von c Gramm erreicht wird. Diese kritische Masse c ist bei beiden Stoffen gleich und wird bei dem radioaktiven Stoff B exakt eine Stunde später als bei dem radioaktiven Stoff A erreicht. Berechnen Sie die kritische Masse c . (2 P.)

Aufgabe 7: Trigonometrie (5 Punkte)

Gegeben sind die Rechtecke $ABHG$ und $ACEF$. Aus den Diagonalen $\overline{AH}$ und $\overline{AE}$ wird ein Dreieck AHE konstruiert. Folgende Angaben sind bekannt:

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 38^\circ, \overline{AH} = 667.5 \text{ mm}, \overline{HE} = 228.5 \text{ mm}$$



- (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AF}$. (2 P.)
- (b) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks AHE . (2 P.)
- (c) Berechnen Sie den Winkel δ . (1 P.)