

Maturité 2025 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4Ba, 4Bb, 4Be, 4GLW, 4IM, 4KSW, 4SI, 4W, 4We, 4WZ

Enseignants : BtT, FrC, HuR, KiA, KrD, MoM, PeM, PrG, RoL, SuF

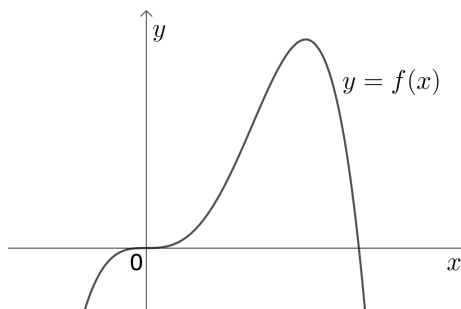
Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-30X Pro MathPrint Formulaire (<i>Fundamentum Mathematik und Physik</i>), sans annotations Dictionnaire français-allemand

La méthode de résolution doit être clairement détaillée pour chaque question.

Pour les questions précédées du symbole , tous les calculs devront être faits **à la main**. Pour obtenir la totalité des points de ces questions, il sera **interdit** d'utiliser les fonctions de calcul numérique de dérivées ou d'intégrales, de produit scalaire ou de produit vectoriel, ainsi que les fonctions *num-solv*, *poly-solv* et *sys-solv* ! Seules les fonctionnalités élémentaires de la calculatrice seront autorisées.

Exercice 1 : Analyse (12 points)

On considère la fonction polynomiale $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$, dont une partie du graphe est donnée ci-dessous.



- (a)  Calculer les coordonnées des points extremums du graphe de f . S'agit-il de points minimums ou maximums? Justifier. (3.5 P.)
- (b)  Le point $W(2|4)$ se trouve sur le graphe de f . Montrer qu'il s'agit d'un point d'inflexion. (1 P.)
- (c) La tangente et la normale au graphe de f au point W forment avec l'axe y un triangle. Calculer l'aire de ce triangle. (3 P.)

On considère également la fonction $g(x) = x^3 - 2x$.

- (d)  Les graphes de f et g forment une surface fermée S_1 . Calculer l'aire A_1 de cette surface. (3 P.)
- (e) Soit $0 \leq p \leq 4$ un nombre réel. Le graphe de f forme avec l'axe x sur l'intervalle $[0; p]$ une surface S_2 , dont l'aire $A_2 = 10$. Calculer p . (1.5 P.)

Exercice 2 : Géométrie vectorielle (13 points)

On considère le triangle ABC , où $A(5|8|3)$, $B(11|0|3)$ et $C(x_C|y_C|z_C)$. Les milieux des trois côtés de ce triangle sont $X(8|4|3)$, $Y(5|-2|3)$ et $Z(2|2|3)$ (voir Figure 1).

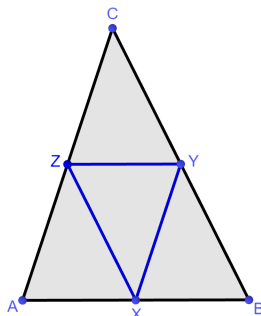


Figure 1

- Montrer par un calcul que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ZY}$ sont colinéaires. (1 P.)
- Calculer les coordonnées du sommet C . (1 P.)
- Calculer l'aire du triangle XYZ . (1.5 P.)

Dans le triangle ABC , on effectue trois pliages¹ le long des côtés $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ et $\overline{XZ}$, jusqu'à ce que les trois points A , B et C se rejoignent² et forment un seul point noté S . On obtient ainsi le tétraèdre $XYZS$ de sommet S (voir Figure 2).

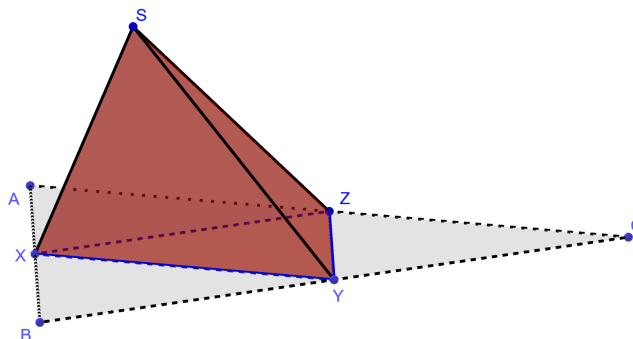


Figure 2

- Lors du pliage, le point A se déplace dans un plan $\mathcal{P}_A$. Ce plan est perpendiculaire au côté $\overline{XZ}$ du tétraèdre. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}_A$ est :
$$\mathcal{P}_A : 3x + y - 23 = 0 \quad (1 \text{ P.})$$
- De même, lors du pliage, le point B se déplace dans le plan $\mathcal{P}_B$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_B$. (1.5 P.)

Suite de l'exercice sur la page suivante !

1. Man faltet dreimal
2. zusammenfallen

- (f) Les deux plans $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ se coupent en une droite g_S , sur laquelle se trouve le sommet S . Déterminer une équation paramétrique de cette droite g_S . (2 P.)
(Indication : si aucune équation pour le plan $\mathcal{P}_B$ n'a été trouvée en (e), on utilisera dans la suite le plan de substitution d'équation $3x - 4y - 13 = 0$).

Un étudiant construit un modèle de ce tétraèdre et mesure les coordonnées du sommet S avec une précision au dixième (un chiffre après la virgule). Il obtient :

$$S (7.0 | 2.0 | 7.5)$$

Dans la suite, on utilisera ces coordonnées dans tous les calculs.

- (g) Calculer l'angle aigu entre la base XYZ du tétraèdre et la face latérale XZS . Le résultat sera arrondi au dixième. (2.5 P.)
- (h) Calculer le volume du tétraèdre $XYZS$. (1.5 P.)
- (i) Dans quelle proportion³ se trouve le volume du tétraèdre $XYZS$ par rapport au volume du grand tétraèdre $ABCS$? Justifier sans faire de calculs. (1 P.)

Exercice 3 : Combinatoire et probabilité (10 points)

Un professeur d'allemand a donné à ses trois classes une dissertation⁴ à rédiger à la maison. Le nombre d'élèves par classe est indiqué dans le tableau ci-dessous.

Classe	4A	4W	4Z
Nombre d'élèves	23	18	14

De retour chez lui, le professeur constate que les dissertations des trois classes se sont complètement mélangées⁵ dans son sac. On pourrait presque croire que quelqu'un a voulu lui faire une blague.

- (a) De combien de manières différentes les dissertations ont-elles pu se mélanger ? (0.5 P.)

Sans prendre la peine de trier les dissertations, le professeur choisit une dissertation au hasard dans le paquet désordonné et commence la correction.

- (b) Quelle est la probabilité que cette première dissertation ne provienne pas de la classe 4W ? (1 P.)

- (c) Quelle est la probabilité que les trois premières dissertations proviennent des trois différentes classes ? (1.5 P.)

Avec l'intelligence artificielle (KI), il est aujourd'hui rapide d'obtenir une dissertation en appuyant sur un simple bouton. Les premières études montrent que 11% des élèves n'écrivent plus leurs dissertations eux-mêmes mais utilisent un outil d'intelligence artificielle pour le faire. On utilisera dans la suite cette probabilité de 11% pour l'ensemble des élèves des trois classes.

- (d) Cinq dissertations sont choisies au hasard. Calculer la probabilité qu'elles aient toutes été générées par une intelligence artificielle. (0.5 P.)

- (e) Calculer la probabilité qu'exactly trois de ces cinq dissertations aient été générées par une intelligence artificielle. (1.5 P.)

- (f)  Combien de dissertations faudrait-il sélectionner au minimum pour que la probabilité d'en trouver au moins une générée par intelligence artificielle soit supérieure à 99% ? (2.5 P.)

- (g) Un logiciel de détection d'intelligence artificielle est capable de démasquer⁶ un texte généré par une intelligence artificielle avec une probabilité de 90%. De même, il est capable, avec la même précision, de reconnaître un texte qui n'a pas été généré par une intelligence artificielle.

Calculer la probabilité qu'une dissertation ait été écrite par un élève (c'est-à-dire sans l'aide d'une intelligence artificielle), sachant que le logiciel l'a déclarée⁷ « générée par intelligence artificielle ». (2.5 P.)

4. *Der Aufsatz*

5. *vermischt*

6. *entlarven*

7. *markieren*

Exercice 4 : Tests d'hypothèses (6.5 points)

De nombreux enfants meurent encore chaque année du paludisme⁸. Les premières infections sont souvent mortelles chez les enfants, car ils n'ont pas encore acquis une immunité suffisante contre les parasites. Des études cliniques sont menées dans plusieurs pays africains afin de tester l'efficacité d'un nouveau vaccin⁹ contre le paludisme. On sait que, sans vaccination, environ 40% des enfants de ces pays contractent le paludisme en l'espace d'un an.

Pour cette étude, un groupe de 310 enfants a été vacciné avec le nouveau vaccin contre le paludisme et on a observé pendant un an combien d'entre eux ont contracté la maladie.

- (a) Combien d'infections au paludisme peut-on espérer observer dans ce groupe si le vaccin n'avait aucun effet ? (0.5 P.)
- (b) Le fabricant affirme que le vaccin peut réduire considérablement la proportion d'enfants qui contractent le paludisme. Il estime que le vaccin est efficace si moins de 115 enfants vaccinés contractent le paludisme.
 - i. Calculer la probabilité que le vaccin soit considéré à tort comme efficace¹⁰ (erreur de 1^{ère} espèce). (1.5 P.)
 - ii. Grâce à son nouveau vaccin, le fabricant estime que seuls 30% des enfants seraient encore atteints de paludisme. Dans ce cas, quelle serait la probabilité que le vaccin soit considéré à tort comme inefficace (erreur de 2^{ème} espèce) ? (2.5 P.)
- (c) Lors de l'évaluation de l'étude, il s'avère que 110 enfants vaccinés ont contracté le paludisme. Peut-on conclure à l'efficacité du vaccin avec un niveau de signification de $\alpha = 5\%$? Justifier par un calcul. (2 P.)

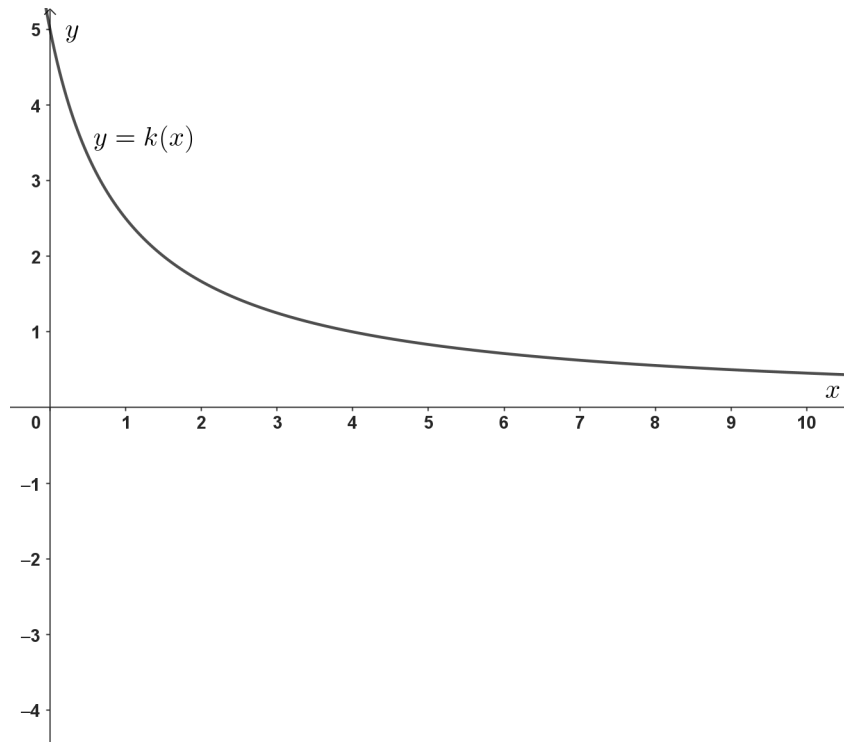
8. *Die Malaria*

9. *Die Impfung*

10. *fälschlicherweise als wirksam angesehen*

Exercice 5 : Optimisation (8 points)

On considère le graphe de la fonction $k(x) = \frac{5}{x+1}$ donné ci-dessous.



Soit $u > 1$. On définit le triangle rectangle PQR , où $P(u | k(u))$ est un point quelconque sur le graphe de k , $Q(1 | 0)$ et $R(u | 0)$. La rotation de ce triangle autour de l'axe x génère un cône droit¹¹.

(a) Pour $u = 4$, esquisser le cône ainsi généré sur le système de coordonnées ci-dessus. (0.5 P.)

(b)  Montrer, pour tout $u > 1$, que le volume V du cône est donné par la fonction suivante :

$$V(u) = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{u-1}{u^2+2u+1} \quad (2.5 \text{ P.})$$

(c)  Calculer u pour que le volume du cône soit maximal. Que vaut ce volume maximal ? Donner sa valeur exacte. (5 P.)

(Indication : on admet ici qu'il s'agit bien d'un maximum. Aucune justification n'est demandée).

11. Ein gerader Kreiskegel

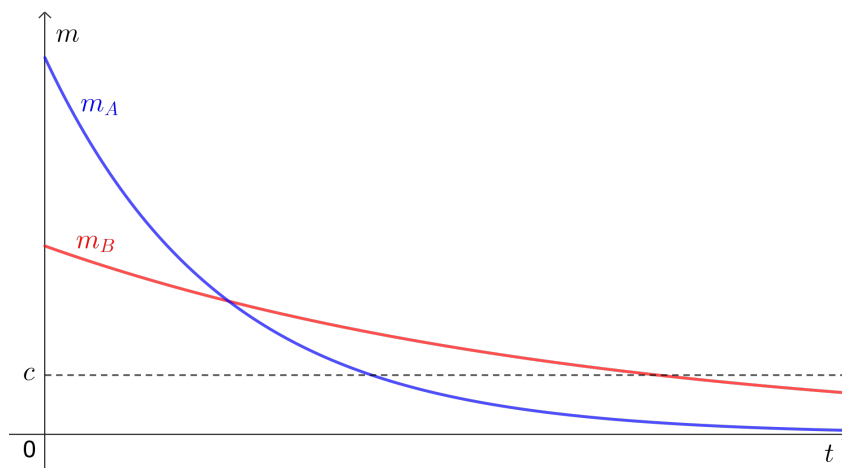
Exercice 6 : Décroissance exponentielle (7.5 points)

Deux éléments radioactifs A et B sont observés en laboratoire. m représente la masse de chaque élément (en grammes) et t le temps (en heures) après le début des observations. La désintégration radioactive¹² de ces deux éléments est décrite par les fonctions exponentielles suivantes :

$$m_A(t) = 400 \cdot e^{-\frac{3t}{10}} \quad \text{et} \quad m_B(t) = 200 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

où e désigne la constante d'Euler.

La figure suivante (qui n'est pas à l'échelle) montre les graphes de ces deux fonctions.



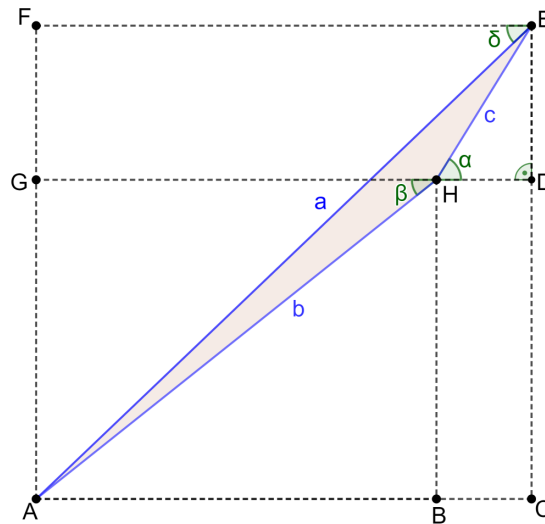
- Montrer qu'au début des observations, la masse de l'élément B est égale à la moitié de celle de l'élément A . (0.5 P.)
-  Combien de temps faut-il pour que la moitié de la masse initiale de l'élément A soit désintégrée ? (1.5 P.)
-  Calculer le temps après lequel les masses des deux éléments A et B sont égales. Que vaut cette masse ? (2 P.)
-  A quel instant t le taux de désintégration instantané de l'élément A est-il de 40 grammes/heure ? (1.5 P.)
- L'observation s'arrête lorsqu'une certaine masse critique c (en grammes) est atteinte. Cette masse critique c est la même pour les deux éléments A et B et est atteinte par l'élément B exactement une heure après l'élément A .
Calculer la valeur de la masse critique c . (2 P.)

12. Der radioaktive Zerfall

Exercice 7 : Trigonométrie (5 points)

On considère les rectangles $ABHG$ et $ACEF$. À partir des diagonales $\overline{AH}$ et $\overline{AE}$ de ces deux rectangles, on construit le triangle AHE . On a les données suivantes :

$$\alpha = 60^\circ ; \quad \beta = 38^\circ ; \quad \overline{AH} = 667.5 \text{ mm} ; \quad \overline{HE} = 228.5 \text{ mm}$$



- (a) Calculer la longueur $\overline{AF}$. (2 P.)
- (b) Calculer le périmètre du triangle AHE . (2 P.)
- (c) Calculer l'angle δ . (1 P.)